

Feuille d'exercices 4 : BARYCENTRE, CONVEXITE

Exercice 1. Soit ABC un triangle de centre de gravité G dans un plan affine. On appelle A', B' et C' les milieux des côtés BC, AC et AB respectivement.

1. Montrer que les trois médianes du triangle sont concourantes en G .
2. Rappeler pourquoi il existe une homothétie de centre G envoyant A' sur A , B' sur B et C' sur C . Quel est son rapport ?
3. On donne un réel k différent de 0 et 1. Soit M un point du plan. On appelle P l'image de M par l'homothétie de centre A' et de rapport k , Q l'image de M par l'homothétie de centre B' et de rapport k et R l'image de M par l'homothétie de centre C' et de rapport k . Quelles sont les images de P, Q et R par l'homothétie de centre M et de rapport $\frac{1}{1-k}$?
4. Montrer qu'il existe une homothétie ou une translation envoyant P sur A , Q sur B et R sur C . Que peut-on dire des droites $(AP), (BQ)$ et (CR) ?

Exercice 2. Dans le plan \mathbb{R}^2 , on considère les trois points $A = (3, 1)$, $B = (-1, 2)$ et $C = (0, -1)$.

1. Montrez que (A, B, C) est un repère affine de \mathbb{R}^2 .
2. Déterminez les points P et Q de \mathbb{R}^2 dont les coordonnées barycentriques dans (A, B, C) sont respectivement $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.
3. Quelles sont les coordonnées barycentriques dans (A, B, C) du point R dont les coordonnées cartésiennes dans $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont $(2, 1)$?
4. Donnez les coordonnées barycentriques dans (A, B, C) du barycentre G de $((P, 1), (Q, 2), (R, 5))$.

Exercice 3. Soit \mathcal{E} le sous-espace affine de \mathbb{R}^3 défini par $x + y + z = 1$.

1. Déterminer les coordonnées cartésiennes du point M barycentre des points $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ affectés des coefficients a, b, c tels que $a + b + c = 1$.
2. Si $P = (x, y, z)$ est un point de \mathcal{E} quelles sont ses coordonnées barycentrique dans le repère (A, B, C) ?

Exercice 4. On note (α, β, γ) les coordonnées barycentriques d'un point M du plan sur le repère (A, B, C) . On suppose que M n'est pas situé sur les droites $(BC), (CA), (AB)$.

1. Traduire cette condition sur α, β et γ .
2. On suppose les droites $(AM), (BM)$ et (CM) respectivement non parallèles à $(BC), (CA)$ et (AB) . Traduire cette condition sur α, β et γ .
3. Sous les hypothèses précédentes, on désigne par A', B', C' les intersections de $(AM), (BM)$ et (CM) avec $(BC), (CA)$ et (AB) . Calculer les coordonnées barycentriques de A', B', C' dans le repère (A, B, C) , puis celles de M sur (A, A') puis sur (B, B') et (C, C') .
4. Caractérisez sur leurs coordonnées barycentriques les points de la droite (AA') et ceux de la droite passant par M et parallèle à (BC) .

Exercice 5. Convexité Soit \mathcal{E} un espace affine. Une partie X de \mathcal{E} est dite *convexe* si pour tous points A et B de X , le segment $[AB]$ est contenu dans X .

1. Montrer que pour tous points A, B de \mathcal{E} , $[AB]$ et $]AB[$ sont convexes.
2. Montrer qu'un sous-espace affine de \mathcal{E} est convexe.
3. Montrer que les convexes de \mathbb{R} sont les intervalles.
4. Montrer que si une partie est stable par barycentration à coefficients positifs alors elle est convexe.
5. Soient X un convexe de \mathcal{E} , r un entier naturel non nul et $\{(A_1, \alpha_1), \dots, (A_r, \alpha_r)\}$ une famille de points pondérés de X telle que $\sum \alpha_i \neq 0$. Montrer par récurrence que si les coefficients α_i sont tous positifs ou nuls alors le barycentre de la famille appartient à X .
6. Montrer que l'intersection d'une famille de convexes est un convexe. Qu'en est-il de la réunion ?
7. Soit X une partie de \mathcal{E} . L'intersection des convexes contenant X est un convexe et c'est le plus petit convexe contenant X . On l'appelle *l'enveloppe convexe de X* et on le note $\text{Conv}X$. Montrer que l'enveloppe convexe de X est l'ensemble des barycentres des familles finies de points de X affectés de coefficients positifs.