

**FEUILLE D'EXERCICES 5 : ANNEAUX ET IDÉAUX**

**Exercice 1.** Lesquels de ces sous-ensembles de  $\mathbb{C}$  sont des sous-anneaux ? Lesquels sont des corps ?

- (1)  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} 10^{-n} \mathbb{Z}$ ;
- (2)  $\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*, (m, n) = 1, p \mid n\}$  ( $p$  est un nombre premier fixé) ;
- (3)  $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-1}$ ,  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2}$ ;
- (4)  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt[3]{2}$ ;
- (5)  $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}] = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{-1}$ ,  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$ .

**Exercice 2.** Les éléments inversibles d'un anneau  $A$  forment le groupe multiplicatif  $(A^\times, \cdot)$ .

- (1) Trouver le groupe  $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]^\times$  en utilisant le module complexe.
- (2) Montrer que le groupe  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$  est infini.

**Exercice 3.** Un élément  $a$  d'un anneau  $A$  est dit nilpotent, s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $a^n = 0$ .

- (1) Trouver tous les éléments inversibles, les diviseurs de zéro, les nilpotents des anneaux suivants :
  - (a)  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ;
  - (b)  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ;
- (2) Démontrer que, pour tout nilpotent  $x$  de  $A$ , l'élément  $1 + x$  est inversible.
- (3) Montrer que l'ensemble  $N$  des éléments nilpotents d'un anneau forme un idéal.

**Exercice 4.** Soit  $I$  et  $J$  deux idéaux de  $A$  étrangers c'est-à-dire tels que  $I + J = A$ .

- (1) Montrer que  $I \cap J = IJ$ .  
On rappelle que  $IJ$  est le groupe additif engendré par les produits.
- (2) Trouver deux idéaux non étrangers d'un anneau  $A$  tels que  $I \cap J \neq IJ$ .

**Exercice 5.** Montrer que les ensembles suivants sont des idéaux non principaux :

- (1)  $I = \{f \in A : 5 \text{ divise } f(0)\}$  où  $A = \mathbb{Z}[X]$ .
- (2) L'idéal  $(X, n)$  où  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n > 1$  de l'anneau  $\mathbb{Z}[X]$ .
- (3)  $I = \{f \in A : f(0) = 0\}$  où  $A = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est l'anneau des applications continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 6.** Démontrer que pour tout corps  $K$ , l'anneau des polynômes  $K[x]$  a une infinité de polynômes unitaires irréductibles.

**Exercice 7.** Soit  $A$  un anneau intègre. Montrer que  $A[x]$  est principalssi  $A$  est un corps.

**Exercice 8.** (1) Soit  $f(x) \in A[x]$  un polynôme sur un anneau  $A$ . Supposons que  $(x-1) | f(x^n)$ . Montrer que  $(x^n - 1) | f(x^n)$ .

(2) Pour  $n, m \geq 2$ , déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme  $(x-2)^m + (x-1)^n - 1$  par  $(x-1)(x-2)$  dans  $\mathbb{Z}[x]$ .

**Exercice 9.** (1) Si  $K$  est un corps, montrer qu'un polynôme  $P$  de degré 2 ou 3 dans  $K[x]$  est irréductible si et seulement si il n'a pas de zéro dans  $K$ .

(2) Trouver tous les polynômes irréductibles de degré 2, 3 à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

(3) Décrire tous les polynômes irréductibles de degré 4 et 5 sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Exercice 10.** (1) Trouver tous les polynômes irréductibles de degré 2, 3 à coefficients dans le corps  $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .

(2) Décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{F}_3[x]$ .

$$x^2 + x + 1, \quad x^3 + x + 2, \quad x^4 + x^3 + x + 1.$$

**Exercice 11.** En utilisant les réductions mod 2 ou mod 3 montrer que les polynômes

$$x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 5 \quad \text{et} \quad 7x^4 + 8x^3 + 11x^2 - 24x - 455$$

sont irréductibles dans  $\mathbb{Z}[x]$ .

En utilisant la partie précédente, montrer que les polynômes

$$5x^3 + 8x^2 + 3x + 15 \quad \text{et} \quad x^5 + 2x^3 + 3x^2 - 6x - 5$$

sont irréductibles dans  $\mathbb{Z}[x]$ .

**Exercice 12.** Soient

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) - 1, \quad g(x) = (x - a_1)^2(x - a_2)^2 \dots (x - a_n)^2 + 1$$

où  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  sont deux à deux distincts. Montrer que  $f$  et  $g$  sont irréductibles dans  $\mathbb{Q}[x]$ .

**Exercice 13.** Soient  $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ . Supposons que  $f$  soit irréductible et qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ . Alors  $f$  divise  $g$ .

**Exercice 14.** Trouver le pgcd( $x^n - 1, x^m - 1$ ) dans  $\mathbb{Z}[x]$ .

**Exercice 15.** Trouver le pgcd( $f, g$ ) dans  $\mathbb{Z}_2[x]$  et sa représentation linéaire  $fu + gv$  où  $d, u, v \in \mathbb{Z}_2[x]$  :

$$(1) \quad f = x^5 + x^4 + 1, \quad g = x^4 + x^2 + 1;$$

$$(2) \quad f = x^5 + x^3 + x + 1, \quad g = x^4 + 1.$$

**Exercice 16.** Trouver le pgcd( $f, g$ ) dans  $\mathbb{Z}_3[x]$  et  $\mathbb{Z}_5[x]$  de  $f = x^4 + 1$ ,  $g = x^3 + x + 1$ .

**Exercice 17.** Trouver le pgcd( $f, g$ ) dans  $\mathbb{Z}[x]$  de  $f = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$  et  $g = x^3 + x^2 - x - 1$ .

**Exercice 18.** Soient  $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$  et  $K$  son corps de fractions.

(1) Montrer que  $x^2 - x + 1$  n'est pas irréductible dans  $K[x]$ .

- (2) Montrer que  $x^2 - x + 1$  est irréductible dans  $A[x]$ .  
 (3) En déduire que  $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$  n'est pas euclidien (et même pas factoriel).

**Exercice 19.** Soit  $P \in \mathbb{Z}[x]$ .

- (1) On suppose que  $P(0)$  et  $P(1)$  sont impairs. Montrer que  $P$  n'a pas de racine dans  $\mathbb{Z}$ .  
 (2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel qu'aucun des entiers  $P(0), \dots, P(n-1)$  ne soit divisible par  $n$ . Montrer que  $P$  n'a pas de racine dans  $\mathbb{Z}$ .

**Exercice 20.** Montrer que  $f$  est irréductible dans  $\mathbb{Q}[x]$  dans chacun des cas suivants :

- (1)  $f = x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$ ;  
 (2)  $f = x^5 - 12x^3 + 36x - 12$ ;  
 (3)  $f = x^4 - x^3 + 2x + 1$ ;

**Exercice 21.** (1) Soit  $P \in \mathbb{Z}[x]$ . Soit  $\frac{a}{b}$  une racine rationnelle :  $P\left(\frac{a}{b}\right) = 0$ ,  $\text{pgcd}(a, b) = 1$ . Montrer que  $\forall k \in \mathbb{Z}$  ( $a - bk$ ) divise  $P(k)$ .

- (2) Quelles racines rationnelles ont les polynômes  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$  et  $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 4$  ?

**Exercice 22.** (1) Soient  $P \in \mathbb{Z}[x]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m = P(n)$ . On suppose  $m \neq 0$ . Montrer que  $\forall k \in \mathbb{Z}$   $m \mid P(n + km)$ .

- (2) En déduire qu'il n'existe aucun polynôme  $P \in \mathbb{Z}[x]$ , non constant, tel que, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $P(n)$  soit un nombre premier.

**Exercice 23.** Soit  $(x^3 - x + 2)$  l'idéal principal engendré par  $x^3 - x + 2$  dans l'anneau  $\mathbb{Q}[x]$ .

- (1) Montrer que l'anneau quotient  $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - x + 2)$  est un corps.  
 (2) Soit  $y$  l'image de  $x$  dans  $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - x + 2)$  par la surjection canonique. Calculer son inverse.  
 (3) Montrer que  $1 + y + y^2$  est non nul et calculer son inverse.

**Exercice 24.** Les polynômes suivants sont-ils irréductibles ?

- (1)  $X^5 + 121X^4 + 1221X^3 + 12221X^2 + 122221X + 222222$  dans  $\mathbb{Q}[X]$ .  
 (2)  $f(X, Y) = X^2Y^3 + X^2Y^2 + Y^3 - 2XY^2 + Y^2 + X - 1$  dans  $\mathbb{C}[X, Y]$  et  $\mathbb{F}_2[X, Y]$ .  
 (3)  $f(X, Y) = Y^7 + Y^6 + 7Y^4 + XY^3 + 3X^2Y^2 - 5Y + X^2 + X + 1$  dans  $\mathbb{Q}[X, Y]$ .

**Exercice 25.** L'idéal principal  $(x^2 + y^2 + 1)$  est-il maximal dans les anneaux  $\mathbb{C}[x, y]$ ,  $\mathbb{R}[x, y]$ ,  $\mathbb{Q}[x, y]$ ,  $\mathbb{Z}[x]$ ,  $\mathbb{Z}_2[x, y]$  ?

**Exercice 26.** Vrai ou faux ?

- (1)  $\mathbb{R}[X, Y]$  est un anneau euclidien.  
 (2)  $\mathbb{Z}[X]$  est un anneau principal.  
 (3)  $\mathbb{Z}[X, Y]$  est un anneau factoriel.  
 (4) Un anneau factoriel est principal.  
 (5) Un anneau euclidien est principal.  
 (6) Un anneau euclidien est factoriel.

**Exercice 27.** Démontrer que tout morphisme non trivial d'un corps dans un anneau est injectif.

**Exercice 28.** Montrer que dans un anneau fini tout idéal premier est maximal.

**Exercice 29.** Montrer que si  $M$  est un idéal maximal de  $A$ , alors le seul idéal premier de  $A$  qui contient  $M^n$  est  $M$ .

**Exercice 30.** (1) Trouver le nombre d'éléments de l'anneau quotient  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]/(m)$  où  $m \in \mathbb{Z}$  et  $m \neq 0$ .

(2) L'idéal principal engendré par 2 est-il premier dans l'anneau  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  ?

**Exercice 31.** Soit  $I$  et  $J$  deux idéaux de l'anneau  $A$ . Considérons la projection canonique  $\pi_I : A \rightarrow A/I$  et l'image  $\bar{J} = \pi_I(J)$  de l'idéal  $J$ .

(1) Montrer que  $\bar{J}$  est un idéal de l'anneau quotient  $A/I$ .

(2) Démontrer qu'on a l'isomorphisme suivant :  $(A/I)/\bar{J} \cong A/(I + J)$ .

**Exercice 32.** (1) Soit  $A$  un anneau principal,  $I$  un idéal de  $A$ . Montrer que tous les idéaux de l'anneau quotient  $A/I$  sont principaux.

(2) Trouver tous les idéaux des anneaux suivants :  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}[x]/(f)$  où  $(f)$  est l'idéal principal engendré par un polynôme  $f$ .

(3) Trouver les idéaux maximaux de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et de  $\mathbb{Q}[x]/(f)$ .

**Exercice 33.** (1) Montrer que les idéaux  $(5, x^2 + 3)$ ,  $(x^2 + 1, x + 2)$ ,  $(x^3 - 1, x^4 - 1)$  ne sont pas principaux dans  $\mathbb{Z}[x]$ .

(2) Les idéaux  $(x, x + 1)$ ,  $(5, x^2 + 4)$  et  $(x^2 + 1, x + 2)$  sont-ils premiers ou maximaux dans  $\mathbb{Z}[x]$  ?

**Exercice 34.** (Anneaux intégralement clos) Soient  $A$  un anneau intègre et  $K$  son corps des fractions. On dit qu'un élément  $x$  de  $K$  est *entier* sur  $A$  s'il vérifie une équation

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \quad \text{avec } a_i \in A.$$

On dit que  $A$  est *intégralement clos* si pour tout  $x \in K$  qui est entier sur  $A$  on a  $x \in A$ .

(1) Montrer qu'un anneau factoriel est intégralement clos.

(2) Soit  $d$  un entier sans facteur carré. Posons  $A = \mathbb{Z}[X]/(X^2 - d)$  et  $\delta$  la classe de  $X$  dans  $A$ . Montrer que si  $d \equiv 1 \pmod{4}$ , alors  $A$  n'est pas intégralement clos.

**Exercice 35.** On dit qu'un nombre algébrique (sur  $\mathbb{Q}$ ) est un *entier algébrique* s'il est racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers.

(1) Montrer qu'un nombre algébrique est un entier algébrique si et seulement si son polynôme minimal sur  $\mathbb{Q}$  est à coefficients entiers.

(2) Montrer qu'un nombre rationnel est un entier algébrique si et seulement si il est entier.

(3) On suppose que  $\alpha$  est un nombre algébrique et racine d'un polynôme irréductible

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 \quad \text{avec } a_n \neq 0, a_i \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que  $a_n \alpha$  est un entier algébrique.

(4) Les nombres algébriques suivants sont-ils des entiers algébriques :  $i$ ,  $\frac{i}{2}$ ,  $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})$ ,  $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  ?

Dans la suite, on fixe un entier  $d \in \mathbb{Z}$  sans facteur carré, une de ses racines carrées  $\delta \in \mathbb{C}$  et le corps  $\mathbb{Q}(\delta)$ .

- (5) Montrer que le polynôme  $X^2 - 2aX + a^2 - db^2$  annule  $a + b\delta$ . Montrer que  $a + b\delta$  pour  $a, b \in \mathbb{Q}$  est un entier algébrique si et seulement si  $a^2 - db^2$  et  $2a$  sont des entiers.
- (6) Déterminer les entiers algébriques du corps  $\mathbb{Q}(i)$ .
- (7) Montrer que les entiers algébriques de  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  sont les  $a + b\sqrt{2}$  avec  $a, b \in \mathbb{Z}$ .
- (8) Est-il vrai que les entiers algébriques de  $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$  sont les  $a + ib\sqrt{3}$  avec  $a, b \in \mathbb{Z}$  ?

**Feuille d'exercices 5 : Indications**

**Exercice 1.** Il s'agit de voir si les sous-ensembles cotiennent 0 et 1 et sont stables par les opérations  $+, -, \times$  pour être un sous-anneau. Pour être un sous-corps il faut en plus être stable par inversion  $z^{-1}$ .

- (1) oui. Donc il faut écrire chaque propriété.
- (2) non. Donc il faut trouver un contre-exemple à une des propriétés.
- (3) oui et oui.
- (4) non. Donc il faut trouver un contre-exemple à une des propriétés. Pour la choisir, comparer aux exemples précédents.
- (5)  $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$  : comment calcule t-on l'inverse d'un nombre complexe ?  
 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$  : Ce qui fait fonctionner la multiplication par l'expression conjuguée du dénominateur est la formule  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ .

**Exercice 2.** (1) On part de  $z_1 z_2 = 1$  et on prend le module.

Penser à vérifier que les conditions nécessaires trouvées sont suffisantes.

- (2) La multiplication  $\bar{z}$  fait disparaître  $i$  car  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ . Quel est l'analogue pour  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  ?

**Exercice 3.** (1) Ecrire les définitions et relever dans  $\mathbb{Z}$ .

- (2) On a envie d'écrire l'inverse de  $1+x$  comme  $\frac{1}{1+x}$ . Alors les développements limités donnent un candidat pour cet inverse.
- (3) Pour la stabilité par addition utiliser le binôme de Newton.

**Exercice 4.** (1) Une inclusion est évidente. La réciproque utilise l'hypothèse.

- (2) Calculer  $IJ$  pour deux idéaux de  $\mathbb{Z}$ .

**Exercice 5.** Supposer qu'il existe  $a$  dans l'anneau tel que  $(a)$  soit égal à l'idéal. Trouver des conditions nécessaires sur  $a$  à l'aide d'éléments variés de l'idéal.

Pour le troisième cas, considérer  $\sqrt{|f|}$ .

**Exercice 6.** Mimer la preuve de l'infinité de l'ensemble des nombres premiers.

**Exercice 7.** Dans un sens, on a la division euclidienne.

Dans l'autre, on a un élément non inversible  $a$  et non nul. Construire un idéal de  $A[X]$  avec  $a$  et  $X$ .

**Exercice 8.** (1)  $(x-1) | f(x)$  équivaut à  $f(1) = 0$ .

- (2) Expliquer pourquoi on peut effectuer cette division euclidienne.

Ecrire la division formellement  $A = BQ + R$ , puis obtenir des informations sur  $R$  en prenant des valeurs.

**Exercice 9.** (1) Raisonner sur le degré des diviseurs éventuels.

- (2) Utiliser la première question.

- (3) Trouver les polynômes réductibles.

**Exercice 10.** (1) Voir exercice précédent.  
 (2) Chercher tous les diviseurs de degré 1 et 2.

**Exercice 11.** Partir de  $A = PQ$ .

**Exercice 12.** Partir avec  $f = QR$ . D'après Gauss, on peut supposer que  $Q$  et  $R$  sont à coefficients entiers. En évaluant aux  $a_i$  et en utilisant Lagrange, montrer que  $Q = R$ . Montrer que  $Q$  est de la forme  $\prod_i (x - a_i) \pm 1$ .

Pour  $g$ , dériver la relation  $g = QR$ .

**Exercice 13.** Justifier que les pgcd de  $f$  et  $g$  dans  $\mathbb{Q}[x]$  et  $\mathbb{C}[X]$  sont égaux.

**Exercice 14.** Montrer que l'on peut travailler dans  $\mathbb{C}[X]$ . Raisonner en termes de racines.

**Exercice 15.** Il s'agit d'appliquer l'algorithme d'Euclide.

**Exercice 16.** Il s'agit d'appliquer l'algorithme d'Euclide.

**Exercice 17.** Montrer que l'on peut travailler dans  $\mathbb{Q}[X]$  et appliquer l'algorithme d'Euclide.

**Exercice 18.** Montrer qu'il suffit de montrer que  $f$  est irréductible dans  $\mathbb{Z}[x]$ .

- (1) Raisonner dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$  ;
- (2) Raisonner dans  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$  ;
- (3) Raisonner dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$  ;

**Exercice 19.** (1) Ecrire le polynôme sous forme canonique, comme pour la théorie du discriminant.  
 (2) Déterminer les inverses de  $A$ . Ecrire le polynôme comme produit de polynômes de degré 1 et aboutir à une contradiction.  
 (3) Penser au lemme de Gauss.

**Exercice 20.** Soit  $P \in \mathbb{Z}[x]$ .

- (1) Utiliser la réduction modulo 2.
- (2) Utiliser la réduction modulo  $n$ .

**Exercice 21.** (1) Ecrire  $P$  sous forme développée. Montrer que  $b$  divise le coefficient dominant de  $P$ . En déduire que le quotient de  $P$  par  $bX - a$  est à coefficients entiers.  
 (2) Montrer que  $a$  divise le coefficient constant de  $P$ . Appliquer la première question.

**Exercice 22.** (1) Utiliser la formule de Taylor.  
 (2) Facile.

**Exercice 23.** Soit  $(x^3 - x + 2)$  l'idéal principal engendré par  $x^3 - x + 2$  dans l'anneau  $\mathbb{Q}[x]$ .

- (1) Il s'agit de montrer que  $x^3 - x + 2$  est irréductible. Penser à Gauss.
- (2) Relever la question à  $\mathbb{Q}[x]$ .
- (3) Relever la question à  $\mathbb{Q}[x]$ .

**Exercice 24.** Les polynômes suivants sont-ils irréductibles ?

- (1) Gauss pour remonter dans  $\mathbb{Z}$  + réduction dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ .
- (2) Considérer  $f$  comme un élément de  $(\mathbb{C}[Y])[X]$  et  $(\mathbb{F}_2[Y])[X]$ .
- (3) Considérer  $f$  comme un polynôme en  $X$ .

**Exercice 25.** Considérer l'idéal engendré par  $x^2 + 1$  et  $y$ .

**Exercice 26.** Vrai ou faux ?

- (1) Considérer l'idéal engendré par  $X$  et  $Y$ .
- (2) Considérer l'idéal engendré par  $2$  et  $X$ .
- (3) Théorème de transfert de  $A$  à  $A[X]$ .
- (4) Utiliser les questions précédentes.
- (5) C'est du cours.
- (6) C'est du cours.

**Exercice 27.** Le noyau est un idéal !

**Exercice 28.** Considérer l'anneau quotient et les puissances d'un élément non nul.

**Exercice 29.** Montrer que si  $M$  est inclus dans  $I$ .

**Exercice 30.** (1) Montrer l'isomorphisme  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]/(m) \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})[X]/(X^2 - d)$ .  
 (2) Même indication.

**Exercice 31.** (1) Simple vérificationnn.

- (2) Considérer le morphisme  $a + I \mapsto a + (I + J)$  de l'anneau  $A/I$  vers l'anneau  $A/(I + J)$ .

**Exercice 32.** (1) Considérer la préimage de l'idéal de  $A/I$  dans  $A$ .

- (2) Considérer la préimage de l'idéal de  $A/I$  dans  $A$ .
- (3) Utiliser la question précédente.

**Exercice 33.** (1) Si  $(5, x^2 + 3) = (P)$  alors  $5$  et  $x^2 + 3$  divisent  $P$ .

- (2) Etudier les anneaux quotients en vous servant respectivement de  $\mathbb{Z}[x]/(x)$ ,  $\mathbb{Z}[x]/(5)$  et  $\mathbb{Z}[x]/(x + 2)$ .

**Exercice 34.** (Anneaux intégralement clos) Soient  $A$  un anneau intègre et  $K$  son corps des fractions. On dit qu'un élément  $x$  de  $K$  est *entier* sur  $A$  s'il vérifie une équation

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \quad \text{avec } a_i \in A.$$

On dit que  $A$  est *intégralement clos* si pour tout  $x \in K$  qui est entier sur  $A$  on a  $x \in A$ .

- (1) Ecrire  $x = p/q$  avec  $p$  et  $q$  premiers entre eux et chasser les dénominateurs de l'expression  $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ .
- (2) Considérer  $\frac{1+\delta}{2}$ .

**Exercice 35.** On dit qu'un nombre algébrique (sur  $\mathbb{Q}$ ) est un *entier algébrique* s'il est racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers.

- (1) Penser au lemme de Gauss.
- (2) Utiliser l'exercice précédent.
- (3) Construire explicitement un polynôme unitaire annulant  $a_n\alpha$ .
- (4) Calculer les polynômes minimaux et utiliser la première question.

Dans la suite, on fixe un entier  $d \in \mathbb{Z}$  sans facteur carré, une de ses racines carrées  $\delta \in \mathbb{C}$  et le corps  $\mathbb{Q}(\delta)$ .

- (5) Encore la question 1.
- (6) Utiliser la question précédente.
- (7) Idem.
- (8) Non. Idem.