Université Claude Bernard Lyon 1 — Algèbre et Géométrie
Semestre d'automne 2019-20 — L3 MGA

Examen 1 – Durée 180 min – le jeudi 28 mai 2020

La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
Les **réponses mal justifiées** ne permettront pas d'obtenir tous les points.
L'énoncé comporte 5 exercices.

Exercice 1. Nombres algébriques
On se propose de déterminer le polynôme minimal de

$$\alpha = i + \sqrt{3}.$$

1. Justifier du fait que α est algébrique. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ le polynôme minimal unitaire de α.
2. Montrer que $\deg(P) \neq 2$ en calculant α^2.
3. Montrer que $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}[i, \sqrt{3}]$.
4. Montrer que $\deg(P) = 4$ sans le calculer.
5. En calculant α^4, trouver un polynôme unitaire Q de degré 4 qui annule α.
6. Montrer que $P = Q$.

Exercice 2. Polynômes irréductibles

1. Montrer que les polynômes $P = X^3 + X + 1$ et $Q = X^5 + X^2 + 1$ sont irréductibles dans $\mathbb{F}_2[X]$.
2. Montrer que le polynôme $R = 5X^3 + 8X^2 + 3X + 15$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
   Indication. Utiliser la question précédente avec P.

Exercice 3. Théorème de Menelaus
On se place dans le plan affine euclidien $E = \mathbb{R}^2$. Soit (ABC) un triangle non plat. Soit A', B' et C' des points respectivement sur les droites (BC), (AC) et (AB). On se propose de montrer que A', B' et C' sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 \tag{0.1}$$

1. Montrer que la composés de deux homothéties est une homothétie ou une translation.
2. Donner un exemple de deux homothéties dont la composée est une translation non égale à l'identité.
3. Considérons les homothéties
   — $h_{A\to B}$ de centre C' qui envoie A sur B ;
   — $h_{B\to C}$ de centre A' qui envoie B sur C ;
   — $h_{C\to A}$ de centre B' qui envoie C sur A.
   Montrer que $h' := h_{C\to A} \circ h_{B\to C} \circ h_{A\to B}$ est une homothétie éventuellement égale à l'identité. Déterminer son centre (en supposant que ce n'est pas l'idenntité).
4. Déterminer le rapport de h'.
5. Montrer que $h_{B\to C} \circ h_{A\to B}$ stabilise la droite $(A'C')$.
6. Conclure.

Exercice 4. Entiers de Gauss et Application.
On rappelle que

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \,:\, a, b \in \mathbb{Z}\}$$

est un sous anneau de $\mathbb{C}$.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ il existe $\omega \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|z - \omega|^2 \leq \frac{1}{2}$.

2. En déduire que l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien.
3. Déterminer, en justifiant, les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

   On se place dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ identifié au plan euclidien. Soit $\mathcal{P}$ un polygone régulier à n côtés (pour $n \geq 3$). On suppose que les coordonnées des sommets de $\mathcal{P}$ sont dans $\mathbb{Q}$. On se propose de montrer que

   $$\mathcal{P} \textit{ est un carré.}$$

4. Montrer qu'il existe un polygône régulier à n côtés dont les coordonnées des sommets sont dans $\mathbb{Z}$.
5. Montrer qu'il existe un polygône régulier $\mathcal{Q}$ à n côtés dont les coordonnées des sommets sont dans $\mathbb{Z}$ et dont le barycentre est 0.
6. Soit z et z' les affixes de deux sommets consécutifs de $\mathcal{Q}$. Traduire le fait que z' est l'image de z dans une rotation par une équation algébrique dans $\mathbb{C}$. Puis montrer que

   $$z^n = (z')^n.$$

7. En utilisant les propriétés de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$, en déduire qu'il existe un élément inversible u de $\mathbb{Z}[i]$ tel que $z' = uz$.
8. Conclure.

Exercice 5. Géométrie projective

Soit d_1, d_2, d_3 et d_4 quatre droites 2 à 2 distinctes du plan projectif réel. Posons

$$d_1 \cap d_2 = \{A\} \quad d_2 \cap d_3 = \{B\} \quad d_3 \cap d_4 = \{C\} \quad d_4 \cap d_1 = \{D\}.$$

Posons aussi

$$d_1 \cap d_3 = \{O\} \quad d_2 \cap d_4 = \{I\}.$$

Dessiner les 4 droites dans le plan affine $\mathbb{R}P^2 - (OI)$. Que peut-on dire du quadrilatère $(ABCD)$ dans ce plan affine ?