Université Claude Bernard Lyon 1 UE Analyse 1 pour les mathématiciens
Semestre d'automne 2022-2023

Epreuve Commune Anonyme – Durée 120 min – Le mardi 3 janvier 2023

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
L'énoncé comporte trois exercices.

Exercice 1. Soit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = \sqrt[n]{n}$.
2. Calculer $(\sqrt{2})^6$ et $(\sqrt[3]{3})^6$. En déduire que $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.
3. Calculer la dérivée de f.
4. Déterminer les limites en 0 et $+\infty$ de f.
5. Dresser le tableau de variation de f.
6. En déduire $\max\{\sqrt[n]{n} \, : \, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$.

1. Vérifier que f est bien définie sur $[1, +\infty[$.
2. Montrer que, pour tout $x \geq 1$, on a $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = |\sqrt{x-1} - 1|$.
3. Montrer que, pour tout $x \geq 1$, on a $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} + 1$.
4. Tracer le graphe de la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto |x| + x + 2$.
5. Trouver une fonction h telle que $f = g \circ h$ ou $f = h \circ g$; et préciser laquelle de ces deux relations est satisfaite.
6. Étudier les variations de f sur $[1, +\infty[$.
7. Soit $u > 0$ un réel. Déterminer l'ensemble des réels x de $[1, +\infty[$ tels que $f(x) = u$.

Exercice 3. Pour tout $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + x^2 + \cdots + x^n. \end{array}$$

1. Soit $n \geq 1$ un entier fixé. Justifier que la fonction $x \mapsto f_n(x)$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
2. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, il existe un unique réel positif, que l'on note u_n vérifiant
$$f_n(u_n) = \frac{n+1}{n}.$$
3. Calculer u_1 et u_2. Vérifier que $u_2 < 1$.
4. Pour tout $n \geq 1$, montrer que $f_{n+1}(u_n) > \frac{n+2}{n+1}$.
5. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
6. Montrer que (u_n) est convergente. On notera ℓ sa limite.
7. Justifier que ℓ appartient à $[0, 1[$.
8. En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $c \in [0, 1[$ tel que
$$\forall n \geq N \qquad u_n^n \leq c^n.$$
9. En déduire que u_n^n tend vers 0.
10. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, u_n vérifie
$$u_n - u_n^{n+1} = \frac{n+1}{n}(1 - u_n).$$
11. En déduire la valeur de ℓ.