Université Claude Bernard Lyon 1 — UE Analyse 1 pour les mathématiciens
Semestre d'automne 2022-2023

Epreuve Commune Anonyme – Durée 120 min – le mardi 3 janvier 2023

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
L'énoncé comporte trois exercices.

Exercice 1. Soit la fonction

$$f\ :\ \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = \sqrt[n]{n}$.
2. Calculer $(\sqrt{2})^6$ et $(\sqrt[3]{3})^6$. En déduire que $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.
3. Calculer la dérivée de f.
4. Déterminer les limites en 0 et $+\infty$ de f.
5. Dresser le tableau de variation de f.
6. En déduire $\max\{\sqrt[n]{n}\ :\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Correction

Soit la fonction

$$f\ :\ \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $n > 0$ donc $f(n)$ est bien défini.
   De plus,
   $$f(n) = e^{\ln(n)/n} = \left(e^{\ln n}\right)^{1/n} = n^{1/n} = \sqrt[n]{n}.$$
2. On a
   $$\sqrt{2}^6 = \left(2^{1/2}\right)^6 = 2^{6/2} = 2^3 = 8$$
   et
   $$(\sqrt[3]{3})^6 = \left(3^{1/3}\right)^6 = 3^{6/3} = 3^2 = 9.$$
   La fonction $x \mapsto x^6$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $\sqrt{2}^6 < (\sqrt[3]{3})^6$ donc $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.
3. Notons v la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $v(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout réel $x > 0$, on a
   $$v'(x) = \frac{\frac{x}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$
   La fonction f est la composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc f est dérivable et on a, pour tout $x > 0$,
   $$f'(x) = v'(x)e^{v(x)} = \frac{1 - \ln x}{x^2} e^{\ln x/x}.$$
4. Lorsque x tend vers 0, $\ln(x)$ tend vers $-\infty$ et $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ donc $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers $-\infty$.
   On en déduit que la limite en 0 de $f(x)$ est égale à 0.
   Par croissances comparées, $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$, donc $f(x)$ tend vers 1 en $+\infty$.

5. La dérivée de f est du signe de $1 - \ln x$, donc f est strictement croissante sur $]0, e]$ et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$.
   On a $f(e) = e^{1/e}$.
   On en déduit le tableau de variation ci-dessous :

x	0		e		$+\infty$
$\mathrm{sgn}(f'(x))$		$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$e^{1/e}$	$\searrow$	1

6. La fonction f est décroissante sur $[e, +\infty[$, donc la suite $(\sqrt[n]{n}) = (f(n))$ est décroissante pour $n \geq 3$.
   On a donc
   $$\forall n \geq 3,\ \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3} \qquad \text{et} \qquad \max_{n \geq 3}(\sqrt[n]{n}) = \sqrt[3]{3}.$$
   De même, f est croissante sur $]0, 2]$, donc $\sqrt[1]{1} < \sqrt[2]{2}$.
   On a vu que $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ donc on peut conclure que
   $$\max_{n \in \mathbb{N}^*}(\sqrt[n]{n}) = \sqrt[3]{3}.$$

Exercice 2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$.

1. Vérifier que f est bien définie sur $[1, +\infty[$.
2. Montrer que, pour tout $x \geq 1$, on a $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = |\sqrt{x-1} - 1|$.
3. Montrer que, pour tout $x \geq 1$, on a $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} + 1$.
4. Tracer le graphe de la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |x| + x + 2$.
5. Trouver une fonction h telle que $f = g \circ h$ ou $f = h \circ g$; et préciser laquelle de ces deux relations est satisfaite.
6. Étudier les variations de f sur $[1, +\infty[$.
7. Soit $u > 0$ un réel. Déterminer l'ensemble des réels x de $[1, +\infty[$ tels que $f(x) = u$.

Correction

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$.

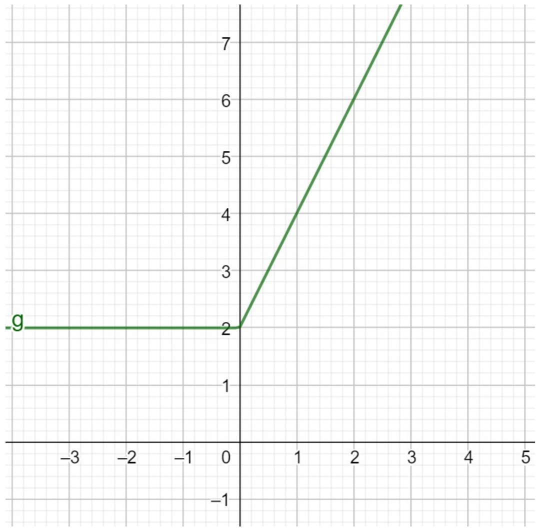
1. Soit $x \geq 1$ un réel.
   La racine carrée de $x - 1$ est bien définie, et $x + 2\sqrt{x-1}$ est bien un réel positif. On remarque que :
   $$x^2 - 4(x-1) = (x-2)^2 \geq 0$$
   donc $x^2 \geq 4(x-1)$, ce qui implique de $x \geq 2\sqrt{x-1}$.
   On en déduit que $x - 2\sqrt{x-1}$ est également un réel positif, donc f est bien définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
2. Soit $x \geq 1$ un réel.
   On a vu dans la question précédente que $x - 2\sqrt{x-1}$ est un réel positif.
   On a de plus :
   $$\left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 = (x-1) + 1 - 2\sqrt{x-1} = x - 2\sqrt{x-1}$$
   Donc $|\sqrt{x-1} - 1| = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$

3. On raisonne de la même façon que dans la question précédente.
Soit $x \geq 1$ un réel.
On sait que $x + 2\sqrt{x-1}$ est un réel positif, tout comme $\sqrt{x-1}+1$, et de plus :

$$\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2 = (x-1)+1+2\sqrt{x-1} = x+2\sqrt{x-1}.$$

Donc on peut conclure que $\sqrt{x-1}+1 = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$.

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = |t| + t + 2$.
Pour tout $t \leq 0$, on a $|t| = -t$ donc $g(t) = 2$.
Pour tout $t \geq 0$, on a $g(t) = 2t + 2$
La fonction g est donc continue et affine par morceaux sur $\mathbb{R}$.



5. En utilisant les questions 2 et 3, on remarque que, pour tout $x \geq 1$, on a

$$f(x) = \sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|.$$

En notant h la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $h(x) = \sqrt{x-1}-1$, on a, pour tout $x \geq 1$, $f(x) = g \circ h(x)$.

6. La fonction g est constante (égale à 2) sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0,+\infty[$. La fonction h est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ et on a $h([1,2]) = [-1,0]$ et $h([2,+\infty[) = [1,+\infty[$. Donc f est constante sur $[1,2]$ et strictement croissante sur $[2,+\infty[$.

7. Soit $u > 0$ un réel.
Si $u \in]0,2[$: alors il n'existe aucun réel x de $[1,+\infty[$ tel que $f(x) = u$.
Si $u = 2$: alors pour tout x de l'intervalle $[1,2]$, $f(x) = 2$. De plus, si $x > 2$, $f(x) > f(2) = 2$. Donc l'ensemble des réels x tels que $f(x) = 2$ est donc l'intervalle $[1,2]$.
Si $u > 2$: alors l'ensemble des réels x tels que $f(x) = u$ est un singleton.
En effet : si $f(x) = u > 2$, alors $x > 2$, donc $f(x) = 2\sqrt{x-1}$. Puis : $x = 1 + \dfrac{u^2}{4}$. L'ensemble des réels x tels que $f(x) = u$ est donc $\left\{1 + \dfrac{u^2}{4}\right\}$.

Exercice 3. Pour tout $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + x^2 + \cdots + x^n. \end{array}$$

1. Soit $n \geq 1$ un entier fixé. Justifier que la fonction $x \mapsto f_n(x)$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

2. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, il existe un unique réel positif, que l'on note u_n vérifiant
$$f_n(u_n) = \frac{n+1}{n}.$$
3. Calculer u_1 et u_2. Vérifier que $u_2 < 1$.
4. Pour tout $n \geq 1$, montrer que $f_{n+1}(u_n) > \dfrac{n+2}{n+1}$.
5. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
6. Montrer que (u_n) est convergente. On notera ℓ sa limite.
7. Justifier que ℓ appartient à $[0, 1[$.
8. En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $c \in [0, 1[$ tel que
$$\forall n \geq N \qquad u_n^n \leq c^n.$$
9. En déduire que u_n^n tend vers 0.
10. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, u_n vérifie
$$u_n - u_n^{n+1} = \frac{n+1}{n}(1 - u_n).$$
11. En déduire la valeur de ℓ.

Correction

1. Soit $n \geq 1$ un entier. La fonction f_n est la somme de n fonctions strictement croissantes sur $[0, +\infty[$, donc elle est strictement croissante.
2. Soit $n \geq 1$ un entier.
   La fonction f_n est continue, strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et vérifie $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ et $f(0) = 0$.
   On sait de plus que $\dfrac{n+1}{n}$ appartient à $[0, +\infty[$.
   Donc, par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel positif u_n tel que $f_n(u_n) = \dfrac{n+1}{n}$.
3. Pour $n = 1$: $f_1 : x \mapsto x$ et $\dfrac{n+1}{n} = 2$. Donc $u_1 = 2$.
   Pour $n = 2$: $f_2 : x \mapsto x + x^2$ et $\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{3}{2}$. On résout l'équation (d'inconnue x) $x^2 + x - \dfrac{3}{2} = 0$. C'est un polynôme de degré 2, de discriminant $\Delta = 1 + 6 = 7$, dont les racines sont donc $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{7}}{2} < 0$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{7}}{2} > 0$.
   La seule solution positive de $f_2 = 0$ est donc $u_2 = \dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$.
   Par ailleurs, $7 < 9$ donc $u_2 < 1$.
4. Soit $n \geq 1$ un entier.
   On a
$$f_{n+1}(u_n) = f_n(u_n) + u_n^{n+1} = \frac{n+1}{n} + u_n^{n+1}$$
   Donc
$$\begin{aligned} f_{n+1}(u_n) - \frac{n+2}{n+1} &= \frac{n+1}{n} + u_n^{n+1} - \frac{n+2}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{n(n+1)} + u_n^{n+1} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} + u_n^{n+1} > 0 \end{aligned}$$
   On conclut donc que $f_{n+1}(u_n) > \dfrac{n+2}{n+1}$.

5. Soit $n \geq 1$ un entier.
   On a, d'après la question précédente, $f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$.
   Or la fonction f_{n+1} est strictement croissante. Donc on peut conclure que $u_n > u_{n+1}$.
   La suite (u_n) est donc strictement décroissante.
6. La suite (u_n) est une suite décroissante de réels positifs, donc elle est convergente. On note sa limite ℓ.
7. Pour tout $n \geq 2$, on a $0 \leq u_n \leq u_2 < 1$.
   Donc la limite ℓ de (u_n) appartient à $[0, 1[$.
8. Soit c un réel de $]\ell, 1[$.
   La suite (u_n) tend vers ℓ donc il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$, $0 \leq u_n \leq c$.
   En passant à la puissance : pour tout $n \geq N$, on a $u_n^n \leq c^n$.
9. On utilise le théorème des gendarmes : pour tout $n \geq N$, on a $0 \leq u_n^n \leq c^n$.
   De plus, la suite (c^n) et la suite constante $(0)_n$ tendent vers 0.
   Donc, par le théorème des gendarmes, la suite (u_n^n) admet une limite et cette limite est égale à 0.
10. Soit $n \geq 1$ un réel.
    Par définition, $f_n(u_n) = \dfrac{n+1}{n}$ et $u_n \neq 1$.
    Or, pour tout $x \neq 1$, $f_n(x) = \dfrac{x - x^{n+1}}{1 - x}$.
    On a donc $u_n - u_n^{n+1} = (1 - u_n)\dfrac{n+1}{n}$
11. On passe à la limite dans cette expression, et on obtient : $\ell - 0 = 1 \times (1 - \ell)$, d'où $\ell = \dfrac{1}{2}$.