Université Claude Bernard Lyon 1 — UE Analyse I pour les mathématiciens

Semestre d'automne 2022-2023

Epreuve Commune anonyme – Durée 120 min – le lundi 5 décembre 2022

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
L'énoncé comporte quatre exercices.

Exercice 1. Fonctions usuelles.
On note

$$\begin{array}{rccl} f : &]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x}\ln(x)+\ln(2). \end{array}$$

1. Calculer la dérivée de f sur $]0,+\infty[$, et en déduire que pour tout $x>0$ le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $\ln(x)+2$.
2. Calculer la limite éventuelle (finie ou infinie) de $f(x)$ pour x tendant vers $+\infty$.
3. Calculer la limite éventuelle (finie ou infinie) de $f(x)$ pour x tendant vers 0.
4. Tracer le tableau de variations de f.
5. Vérifier que $a=2$ et $a=4$ satisfont à l'équation
$$f(2^{-a})=0.$$
6. On rappelle que $0,5<\ln(2)<1$. Montrer que
$$2^{-4}<e^{-2}<2^{-2}.$$
En déduire, à l'aide des deux questions précédentes, que $f(e^{-2})<0$.
7. Montrer que la restriction de f à $]0,e^{-2}]$ est injective.
8. Montrer que f s'annule exactement une fois sur $]0,e^{-2}]$.
On admettra que, de même f s'annule exactement une fois sur $]e^{-2};+\infty[$.
9. Résoudre l'équation
$$x^{\sqrt{x}}=\frac{1}{2},$$
d'inconnue $x\in]0;+\infty[$.

Exercice 2. Une suite arithmético-géométrique
On définit par récurrence la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+3. \end{cases}$$

1. Résoudre l'équation $\alpha=\frac{1}{4}\alpha+3$, d'inconnue α.
2. Posons $(v_n)_n=(u_n-\alpha_0)_n$, où α_0 est la solution de l'équation de la première question.
Exprimer, pour tout $n\geq 0$, v_{n+1} en fonction de v_n.
3. Déterminer, pour tout $n\geq 0$, v_n, puis u_n, en fonction de n.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 3. Suites. On définit par récurrence les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}$$

1. Montrer par récurrence que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes.
3. En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers les réels que l'on notera ℓ (pour (u_n)) et ℓ' (pour (v_n)).
4. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et en déduire une première relation entre ℓ et ℓ'.
5. En écrivant, pour tout $n \geq 0$, u_n^2 en fonction de u_{n+1}, u_n et v_n, montrer que $\ell\ell' = 0$.
6. En déduire les valeurs de ℓ et ℓ'.

Exercice 4. Étude de fonctions. On cherche à étudier la fonction

$$f(x) = \ln(\cos^2 x).$$

1. Justifier que $f(x)$ est bien définie dès que $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.
   On note $D_f = \mathbb{R} - (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$ le domaine de f.
2. Déterminer la parité de f. Montrer que f est π-périodique.
3. Calculer la fonction dérivée de f sur D_f. Déterminer le signe de f' sur $[0; \frac{\pi}{2}[$.
4. Calculer la limite de f à gauche de $\frac{\pi}{2}$ et sa valeur en 0.
5. Donner la table de variations de f sur $[0; \frac{\pi}{2}[$.
6. Tracer le graphe de f, en indiquant ses asymptotes.