Feuille 2 : Fonctions et fonctions usuelles

Exercice 1 (Injection, surjection, bijection)**.**
Les fonctions suivantes sont-elles des injections ? Des surjections ? Des bijections ?

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_1(x) = x^2 + 1$.
2. $f_2 : \mathbb{R} \to [1, +\infty[$ définie par $f_2(x) = x^2 + 1$
3. $f_3 : [-4, -2] \cup [0, 1] \to [1, +\infty[$, définie par $f_3(x) = x^2 + 1$.
4. $f_4 : \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$, définie par $f_4(x) = \tan(x)$.
5. $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ définie par $f_5(x) = e^x$.
6. $f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ définie par $f_6(x) = e^{x^2}$.

Exercice 2 (Homographies)**.**
Soit f la fonction réelle de variable réelle définie par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$.

1. Trouver 3 réels a, b et c tels que
$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \qquad \frac{2x+3}{x-1} = a + \frac{b}{x-c}.$$
2. En déduire une suite de transformations explicites du plan transformant le graphe de l'hyperbole $y = \dfrac{1}{x}$ en la courbe représentative de f.
3. Expliquer pourquoi cette démarche fonctionne pour toute fonction du type $h(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, où α, β, γ et δ sont des constantes réelles telles que $\gamma \neq 0$ et $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Exercice 3 (Trinôme)**.**
Soient $a \neq 0$, b et c trois réels. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Rappeler les variations de f en fonction du signe de a.
2. Comment s'appelle la courbe représentative de f ? Quelle propriété de symétrie possède-t-elle ? Comment cette symétrie se traduit-elle algébriquement ?
3. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
4. Tracer sur le même graphique une courbe représentative des fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$, toutes deux définies sur $\mathbb{R}^+$. Pourquoi ces deux courbes sont-elles symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$?

Exercice 4 (Partie entière)**.**
On rappelle que l'on note $E(x)$ la partie entière d'un réel x.

1. Quelle est l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction partie entière ?
2. Combien vaut $E(0.5)$? Et $E(-1.5)$?
3. Tracer les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto E(x)$, $x \mapsto E(2x)$ et $x \mapsto E(x/2)$.

Exercice 5 (Trigo)**.**
Soient x et y deux réels.

1. Exprimer les réels $\cos(x+y)$, $\cos(2x)$, $\sin(x+y)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos x$, $\sin x$, $\cos y$ et $\sin x$.
2. Montrer que $1 + \sin x = \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.
3. Exprimer les réels $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
4. Exprimer en fonction de $\tan x$ seulement les expressions suivantes :

(a) $f_1(x) = \cos^2 x$

(b) $f_2(x) = \dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x - \cos^4 x}$

(c) $f_3(x) = \dfrac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x}$

(d) $f_4(x) = \cos^2 x - \sin x \cos x$.

Exercice 6 (Trigo - encore !)**.**

1. Rappeler les formules d'addition de $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$.
2. Résoudre l'équation, d'inconnue x : $\sin x = \dfrac{1}{2}$.
3. Montrer qu'il existe un réel θ tel que, pour tout réel y, $\sin(y+\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin y + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos y$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation, d'inconnue y :

$$\sin y + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 7 (Composition)**.**

1. Soient I, J et K des parties de $\mathbb{R}$ et $f : J \to K$ et $g : I \to J$. Montrer que si f et g sont toutes les deux monotones, alors $f \circ g$ est également monotone. Pouvez-vous préciser son sens de variation en fonction de ceux de f et de g ?
2. Écrire les fonctions suivantes comme la composée de deux fonctions et en déduire leur sens de variation.

(a) $x \mapsto (1+2x)^2$;

(b) $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$;

(c) $x \mapsto \exp(x^2-1)$.

Exercice 8 (Image directe, image réciproque)**.**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto x^2$, et E la fonction partie entière.

Déterminer les ensembles suivants :

1. $f([0,3])$.
2. $f^{-1}([0,4])$
3. $f^{-1}([-1,4])$
4. $f^{-1}([\sqrt{2},4])$
5. $\sin([0,\pi]$
6. $\sin^{-1}(\{0.5\})$
7. $\sin^{-1}([-0.5,0.5])$
8. $\tan^{-1}([-1,1])$.
9. $E([-1.5,1.5])$.
10. $E^{-1}([-1,1] \cup \{2\})$.

Exercice 9 (Réciproque de fonctions circulaires)**.**

1. Soit $f = \cos|_{[2\pi,3\pi]}$, la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[2\pi,3\pi]$.
   Exprimer $f^{-1} : [-1,1] \to [2\pi,3\pi]$ en utilisant les fonctions arccos et/ou arcsin.
2. Soit $g = \cos|_{[\pi,2\pi]}$, la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[\pi,2\pi]$.
   Exprimer $g^{-1} : [-1,1] \to [\pi,2\pi]$ en utilisant les fonctions arccos et/ou arcsin.

Exercice 10 (Réciproque de fonctions circulaires : Calcul)**.**

Calculez les valeurs suivantes :

1. $\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
2. $\arcsin\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
3. $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$
4. $\arctan(-1)$
5. $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$
6. $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{9\pi}{4}\right)\right)$
7. $\sin\left(\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)\right)$
8. $\tan(\arctan(3))$.

Exercice 11 (Dérivée)**.**

Calculer là où cela est possible les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \sin^2 x$
2. $f_2 : x \mapsto \sin(x^2)$
3. $f_3 : x \mapsto \cos^2(3x)$
4. $f_4 : x \mapsto \tan(x^2)$
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{1-x}{2+x}$
6. $f_6 : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$
7. $f_7 : x \mapsto e^{2x+1}$
8. $f_8 : x \mapsto \ln(1+x^4)$
9. $f_9 : x \mapsto \ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$
10. $f_{10} : x \mapsto \ln|\cos x|$

Exercice 12 (Fonctions hyperboliques)**.**
Montrer que pour tous réels u et v, on a :

$$\cosh^2 u + \sinh^2 v = \sinh^2 u + \cosh^2 v = \cosh(u+v)\cosh(u-v)$$
$$\cosh^2 u - \cosh^2 v = \sinh^2 u - \sinh^2 v = \sinh(u+v)\sinh(u-v)$$

Exercice 13 (Équation - Fonctions hyperboliques)**.**

1. Calculer $\cosh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$ et $\sinh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$.
2. À l'aide de la formule de calcul du $\cosh(a+b)$, résoudre l'équation d'inconnue réelle x :

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\cosh x + \frac{1}{\sqrt{3}}\sinh x = \cosh(5x).$$

Exercice 14 (Limite - exp)**.**

1. Discuter en fonction de la valeur du réel a l'existence et la valeur éventuelle de la limite de a^n quand n tend vers $+\infty$.
2. À quelle condition la fonction $x \mapsto a^x$ est-elle bien définie sur $\mathbb{R}$? Que pouvez-vous dire dans ce cas de la limite de a^x lorsque x tend ers $+\infty$?

Exercice 15 (Limites - Opérations)**.**
Calculer, si elles existent les limites quand x tend vers $+\infty$ de :

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{x^2+2x^5}{1+x^4}$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{x\sin x + x^2}{1+x^2}$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x}+5}{x^2+\cos x}$
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{x}\ln(2x+3)$
6. $f_6 : x \mapsto \sin\dfrac{1}{x}$
7. $f_7 : x \mapsto x + \cos x$
8. $f_8 : x \mapsto e^{-x}(\cosh^3 x - \sinh^3 x)$
9. $f_9 : x \mapsto x - \ln(\cosh x)$.

Exercice 16 (Fonction réciproque - Dérivée)**.**

1. Montrer que sinh est une bijection continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
2. Calculer explicitement la dérivée de la réciproque $\sinh^{-1}$ à partir d'une formule du cours.
3. Calculer explicitement $\sinh^{-1}(y)$ pour y réel et retrouver le résultat du 2.

Exercice 17 (Fonction réciproque - Dérivée)**.** Donner les dérivées des fonctions suivantes définies par :

1. $x \mapsto \arccos(\cos(x))$
2. $x \mapsto \arcsin(\sin(x))$
3. $x \mapsto \arcsin(\cos(x))$
4. $x \mapsto \arccos(\sin(x))$
5. $x \mapsto \arctan(\tan(x))$
6. $x \mapsto \arctan(\sin(x))$

Les exercices ci-dessous sont facultatifs

Études complètes de fonctions

Exercice 18 (Fraction rationnelle)**.**
On définit une fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+3x+3}{x+1}$$

1. Étudier les variations de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

3. Calculer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de l'expression

$$f(x) - (x+2)$$

En déduire que la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote au graphe de f.
4. Déterminer la position du graphe de f par rapport à cette asymptote.
5. Tracer le graphe de f.

Exercice 19 (Avec un logarithme).

On note f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x) = (1-x)\ln(1-x) + x$ et g la fonction définie sur $]0,1[$ par $g(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

1. Étudier les variations de f sur $[0,1[$ et en déduire que f est à valeurs positives.
2. Étudier les variations de g sur $]0,1[$.
3. Déterminer les limites éventuelles de $g(x)$ pour x tendant vers 0 et pour x tendant vers 1.

Exercice 20 (Avec une exponentielle).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right) e^{-x^2}$.

1. Déterminer les limites éventuelles de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f.
3. Tracer sommairement la courbe représentative de f.

Exercice 21 (Fonctions hyperboliques).

Soit f la fonction définie par :

$$f(u) = \frac{4 - 5\cosh u}{\sinh u}$$

1. Montrer que f est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Est-elle paire ? Impaire ?
2. Déterminer les limites éventuelles de f en $+\infty$ et en 0^+.
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^*$. On attend une expression très simple des points d'annulation de f'.
4. Dresser le tableau de variations de f puis tracer son graphe.

Exercice 22 (Fonctions trigo).

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2\sin x + \sin(2x)$.

1. Déterminer son ensemble de définition et sa plus petite période, et discuter sa parité. Au vu de ces informations, choisir un intervalle d'étude approprié.
2. Calculer sa dérivée, puis discuter du signe de celle-ci en fonction de x.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 23 (Limites et asymptotes).

Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$.

1. On note g la fonction définie par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$. Dresser le tableau de variations de g, et en déduire qu'il existe un et un seul réel x_0 tel que $g(x_0) = 0$. Déterminer x_0.
2. En déduire les variations de f.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Déterminer les asymptotes au graphe de f.
5. Tracer ce graphe et ses asymptotes, en veillant à faire figurer les tangentes remarquables.

Exercice 24 (Période).

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sin^2 x + \frac{1}{2}\cos x$$

1. Déterminer son ensemble de définition et sa plus petite période, et discuter sa parité. Au vu de ces informations, choisir un intervalle d'étude approprié.
2. Montrer qu'il existe un et un seul x_0 dans $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ pour lequel $\cos(x_0) = \dfrac{1}{4}$.
3. Étudier les variations de f sur $[0,\pi]$.
4. Dresser le tableau de variations de f puis tracer son graphe.