Correction Feuille 3 : Suites réelles

Exercice 1 (Variations).

Étudier la monotonie des suites définies par les termes généraux suivants :

1. Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}$
2. $u_n = n - 2^n$
3. $u_n = \dfrac{e^n}{n!}$,
4. $u_n = (n+1)(n+2)\dots(n+n)$
5. $u_n = \dfrac{n-1}{n+3}$
6. $u_n = n - \sinh(n)$.

<u>**Correction**</u>

1. Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}$.
   Donc pour tout $n \geq 1$, on a
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} < 0$$
   Donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
2. $u_n = n - 2^n$.
   Pour tout $n \geq 0$, on a :
   $$u_{n+1} - u_n = (n+1) - 2^{n+1} - n + 2^n = 1 - 2^n(2-1) \leq 0$$
   Donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante (et même strictement décroissante à partir du rang 1).
3. $u_n = \dfrac{e^n}{n!}$,
   Pour tout $n \geq 0$, u_n est strictement positif, et on a :
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{e^n} = \frac{e}{n+1}.$$
   Cette suite n'est pas monotone car u_{n+1}/u_n est supérieur à 1 pour $n = 0$ et $n = 1$, et inférieur à 1 pour tout $n \geq 2$. Elle est strictement décroissante à partir du rang 2.
4. $u_n = (n+1)(n+2)\dots(n+n)$
5. $u_n = \dfrac{n-1}{n+3}$
   Pour tout $n \geq 0$, on a
   $$u_n = 1 - \frac{4}{n+3}.$$
   La fonction $x \mapsto 1 - 4/(x+3)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.
6. $u_n = n - \sinh(n)$.
   Pour tout $n \geq 0$, on a :
   $$u_{n+1} - u_n = n + 1 - \sinh(n+1) - n + \sinh(n) = 1 - \sinh(n+1) - \sinh(n).$$
   La fonction $x \mapsto \sinh(x+1) - \sinh(x)$ est dérivable et de dérivée positive sur $\mathbb{R}^+$: elle est donc strictement croissante. En $x = 0$, on a $\sinh 1 - \sinh 0 \simeq 1.17$, donc pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n$ est négatif : la suite (u_n) est donc décroissante.

Exercice 2 (Variations et majorant/minorant).

Étudier le sens de variation des suites suivantes. Déterminer également, pour chacune de ces suites, les valeurs de $\sup\limits_n u_n$ et $\inf\limits_n u_n$.

1. $u_n = 2^n$
2. $u_n = 2^n + \cos(n)$
3. $u_n = 3^{-n}$
4. $u_n = \dfrac{1}{n+2+(-1)^n}$
5. $u_n = \dfrac{1}{2n+(-1)^n}$

<u>**Correction**</u>

1. $u_n = 2^n$
   La suite (u_n) est strictement croissante. Elle est minorée par 1 et $\inf\limits_{\mathbb{N}} u_n = 1$ et n'est pas majorée :$\sup\limits_{\mathbb{N}} u_n = +\infty$.
2. $u_n = 2^n + \cos(n)$
   Pour tout $n \geq 0$, on a : $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n + \cos(n+1) - \cos n$.
   Pour $n = 0$: $u_1 - u_0 = 2 - 1 + cos(1) - cos(0) = cos(1) > 0$.
   Et pour tout $n \geq 1$: $2^{n+1} - 2^n \geq 3$ et $\cos(n+1) - \cos(n) \in [-2, 2]$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$.
   La suite (u_n) est donc strictement croissante.
   Elle n'est pas majorée (parce que pour tout n, $u_n \geq 2^n - 1$, et son inf égal à $u_0 = 2$.
3. $u_n = 3^{-n}$
   La suite (u_n) est strictement décroissante. Son inf est égal à 0 et son sup est égale à $u_0 = 1$.
4. $u_n = \dfrac{1}{n+2+(-1)^n}$
   On peut calculer les premiers termes de (u_n) :
   $$u_0 = \frac{1}{3} \qquad u_1 = \frac{1}{2} \qquad u_2 = \frac{1}{5} \qquad u_3 = \frac{1}{4} \quad \cdots$$
   La suite (u_n) n'est donc pas monotone. Mais les suites $(u_{2k}$ et u_{2k+1} sont toutes les deux strictmeent décroissantes :
   $$u_{2k} = \frac{1}{2k+3} \qquad \text{et} \qquad u_{2k+1} = \frac{1}{2k+2}$$
   (u_{2k}) admet pour sup le réel $u_0 = 1/3$ et (u_{2k+1}) admet pour sup le réel $u_1 = 1/2$. Donc $\sup\limits_n(u_n) = 1/2$.
   De plus, les deux suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) admettent 0 pour borne inf, donc $\inf\limits_n u_n = 0$.
5. $u_n = \dfrac{1}{2n+(-1)^n}$
   Pour tout $k \geq 0$, on a :
   $$u_{2k} = \frac{1}{4k+1} \qquad \text{et} \qquad u_{2k+1} = \frac{1}{4k+1}$$
   On a donc : $u_{2k} = u_{2k+1} > u_{2k+2} = u_{2k+3}$.
   La suite (u_n) est donc décroissante (mais pas strictement décroissante).
   On a $\sup\limits_n u_n = u_0 = 1$ et $\inf\limits_n u_n = 0$.

Exercice 3 (Des limites)**.**
Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes, définies par leur terme général.

1. $u_n = \dfrac{n+2}{2n-1}$
2. $u_n = \dfrac{3n^2-2n+3}{n^3-1}$
3. $u_n = \dfrac{3n^2-5}{n+4}$
4. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n-1}}$
5. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+5}+n}{\sqrt{n^2+1}}$
6. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
7. $u_n = \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$

8. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
9. $u_n = \dfrac{n-(-1)^n}{2n+(-1)^n}$
10. $u_n = \cos(n\pi)$
11. $u_n = \dfrac{3^n-2^n}{2^n-3^n}$
12. $u_n = \dfrac{2^n}{n^{100}}$
13. $u_n = \cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$
14. $u_n = (-1)^n \dfrac{\cos n}{n}$
15. $u_n = \cos\left(\dfrac{n}{2}\,\pi\right)$
16. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n+3}}$

Correction

1. $u_n = \dfrac{n+2}{2n-1} = \dfrac{n(1+\frac{2}{n})}{n(2-\frac{1}{n})} = \dfrac{1+\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{n}\right) = 2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.
2. $u_n = \dfrac{3n^2-2n+3}{n^3-1} = \dfrac{n^2(3-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2})}{n^3(1-\frac{1}{n^3})} = \dfrac{1}{n}.\dfrac{3-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}}$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}} = 3$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. $u_n = \dfrac{3n^2-5}{n+4} = \dfrac{n^2(3-\frac{5}{n^2})}{n(1+\frac{4}{n})} = n.\dfrac{3-\frac{5}{n^2}}{1+\frac{4}{n}}$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3-\frac{5}{n^2}}{1+\frac{4}{n}} = 3$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
4. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n-1}} = \dfrac{\sqrt{n(1+\frac{2}{n})}}{\sqrt{n(1-\frac{1}{n})}} = \dfrac{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{n}\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \dfrac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{1} = 1$.
5. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+5}+n}{\sqrt{n^2+1}} = \dfrac{n\left(1+\frac{\sqrt{n+5}}{n}\right)}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}} = \dfrac{n\left(1+\sqrt{\frac{n+5}{n^2}}\right)}{\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$.
   $n = \sqrt{n^2}$ car n est positif, donc $u_n = \dfrac{n(1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}})}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \dfrac{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$.
   On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1+0}{1} = 1$.
6. $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
7. On a $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, donc $\dfrac{-1}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{+1}{\sqrt{n}}$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{+1}{\sqrt{n}} = 0$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que
   $$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} = 0.$$
8. On a $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$. On a posé $h = \dfrac{1}{n}$.
   Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^1 = e$.

9. $u_n = \dfrac{n-(-1)^n}{2n+(-1)^n} = \dfrac{n(1-\frac{(-1)^n}{n})}{n(2+\frac{(-1)^n}{n})} = \dfrac{1-\frac{(-1)^n}{n}}{2+\frac{(-1)^n}{n}}$.
   $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = 0$, par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.
   Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.
10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.
11. $u_n = \dfrac{3^n-2^n}{2^n-3^n} = (-1)\dfrac{3^n-2^n}{3^n-2^n} = -1$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite constante égale à -1. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.
12. $u_n = \dfrac{2^n}{n^{100}} = \dfrac{\exp(n\ln(2))}{\exp(100\ln(n))} = \exp(n\ln(2) - 100\ln(n)) = \exp\left(n\left(\ln(2) - 100\dfrac{\ln(n)}{n}\right)\right)$.
    Or on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$.
    Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(2) - 100\dfrac{\ln(n)}{n} = \ln(2) > 0$.
    Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
13. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \cos 0 = 1$.
14. On a $|u_n| \leq \dfrac{1}{n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$.
    Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
15. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{4n} = \cos(2n\pi) = 1$ et $u_{4n+1} = \cos\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.
    Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{4n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{4n} = 0 \neq \lim\limits_{n\to+\infty} u_{4n}$.
    Ainsi u_n n'a pas de limite.
16. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n+3}}$
    On utilise l'expression conjuguée : pour tout $n \geq 0$, on a :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n+3}} \times \frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+3}} = \frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+3}}{(2n+1)-(2n+3)} = \frac{-1}{2}\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+3}\right)$$

    Donc (u_n) diverge vers $-\infty$.

Exercice 4 $((\sin(n))_n)$**.**

L'objectif de cet exercice est de démontrer que la suite $(\sin n)_n$ n'admet pas de limite. On raisonne par l'absurde : on suppose donc qu'il existe un réel ℓ tel que $\lim\limits_{n} \sin n = \ell$.

1. En exprimant, pour tout entier naturel n, $\sin(n+1)$ en fonction de $\sin n$ et $\cos n$, montrer que la suite $(\cos n)$ admet une limite $\tilde{\ell}$ et donner une relation entre ℓ et $\tilde{\ell}$.
2. Quelle autre relation existe-t-il entre ℓ et $\tilde{\ell}$?
3. Montrer que, pour tout n, on a $\sin(n+1) + \sin(n-1) = 2\sin n \cdot \cos 1$.
4. Déterminer la limite de chacun des membres de cette égalité et en déduire que $\ell = 0$.
5. Conclure.
6. Justifier que la suite $(\sin n)_n$ admet une suite extraite convergente.

<u>**Correction**</u>

1. Soit n un entier naturel.
   On a $\sin(n+1) = \sin n \times \cos 1 + \cos n \times \sin 1$.
   Donc $\cos n = \dfrac{1}{\sin 1}(\sin(n+1) - \cos 1 \sin n)$.
   Or les suites $(\sin n)_n$ et $(\sin(n+1))_n$ admettent toutes les deux la même limite ℓ (si elle existe.
   On en déduit donc que la suite $(\cos n)$ converge vers $\tilde{\ell} = \dfrac{1-\cos 1}{\sin 1}\ell$.
2. Pour tout n, on sait que $\cos^2 n + \sin^2 = n = 1$, donc, en passant à la limite, on obtient : $\ell^2 + \tilde{\ell}^2 = 1$.
3. On développe le membre de gauche : pour tout $n \geq 0$, on a
$$\sin(n+1) + \sin(n-1) = \sin n \ \cos 1 + \cos n \ \sin 1 + \sin n \ \cos 1 - \cos n \ \sin 1 = 2 \sin n \ \cos 1.$$
4. Les suites $(\sin n)$, $(\sin(n+1))$ et $(\sin(n-1))$ convergent toutes trois vers ℓ : on a donc $2\ell = 2\cos 1 \ell$, d'où $\ell = 0$.
5. Si ℓ est nul, alors $\tilde{\ell}$ est également nul.
   Or, on doit avoir $\ell^2 + \tilde{\ell}^2 = 1$.
   D'où la contradiction.
6. La suite $(\sin n)$ est une suite bornée (pour tout n, u_n appartient à $[-1,1]$), donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous-suite convergente.

Exercice 5 (Suite monotone)**.**
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer qu'elle converge et que sa limite ℓ vérifie :
$$\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1.$$
3. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$.

__**Correction**__

1. Montrons que la suite (u_n) est croissante :
$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \ldots + \frac{1}{2(n+1)}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{2(n+1) + 2n + 1 - 2(2n+1)}{(2n+1)2(n+1)} \\
&= \frac{2n+2+2n+1-4n-2}{(2n+1)2(n+1)} \\
&= \frac{1}{(2n+1)2(n+1)}
\end{aligned}$$
   Donc $u_{n+1} - u_n > 0$, par suite $u_{n+1} > u_n$. On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

2. Dans la définition de (u_n), on remarque que le terme le plus grand est $\frac{1}{n+1}$ et le terme le plus petit est $\frac{1}{2n}$. De plus, u_n est défini comme la somme de n termes. On en déduit l'encadrement

$$n\left(\frac{1}{2n}\right) < u_n < n\left(\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\frac{1}{2} < u_n < \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

Donc $\frac{1}{2} < u_n < 1$.
Comme la suite est croissante et majorée (par 1), elle converge par le théorème de la convergence monotone vers une limite ℓ, et cette limite vérifie $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$.

3. Soit la suite $v_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$. Par l'absurde, supposons que (v_n) converge vers μ. On a $v_{2n} = v_n + u_n$.
En prenant la limite on obtient $\mu = \mu + \ell$. D'où $\ell = 0$. C'est impossible vu l'encadrement de ℓ dans la question 2. On en déduit que (v_n) n'a pas de limite finie. Comme elle est croissante alors $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 6 (Avec des ϵ)**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels différents de -1 telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{1+u_n} = 0$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Correction

Soit ε un réel de $]0,1[$.
On sait que $(u_n/(1+u_n)$ tend vers 0, donc il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$, on a $\left|\frac{u_n}{1+u_n}\right| \leq \varepsilon$.
On a donc, pour tout $n \geq N$: $|u_n| \leq \varepsilon\ |1+u_n| \leq \varepsilon(1+|u_n|)$.
On obtient alors, pour tout $n \geq N$: $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$.
Soit maintenant δ un réel strictement positif. Il existe $\varepsilon \in]0,1[$ tel que $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \leq \delta$.
Donc il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \leq \delta$.
On peut donc conclure que la limite (u_n) existe et est égale à 0.

Exercice 7 (Rangs pairs et impairs)**.**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente.
2. Soit (v_n) une suite telle que les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers le même réel ℓ. Montrer que la suite (u_n) converge vers ℓ.

Correction

1. On peut utiliser le théorème des gendarmes : pour tout n, $u_{2\lfloor n/2\rfloor} \leq u_n \leq u_{2\lfloor n/2\rfloor+2}$
Ou alors le faire à la main : On note ℓ la limite de la suite (u_{2n}).
On sait que la suite (u_{2n}) est croissante, donc, pour tout $n \geq 0$, on a $u_{2n} \leq \ell$.
Soit $\varepsilon > 0$ un réel.
Il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait : $|u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$.
On a alors : $0 \leq \ell - u_{2n} \leq \varepsilon$ et $u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq \ell$,
Donc $\ell - \varepsilon \leq u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq \ell$.

Or la suite (u_n) est croissante donc, pour tout n, on a $u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq u_{2n+2}$.
D'où : pour tout $n \geq N$, $\ell - \varepsilon \leq u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq \ell$, ce qui implique que

$$|u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon.$$

Pour tout $k \geq 2N$, on a donc $|u_k - \ell[\leq \varepsilon$.
On peut donc conclure la limite de (u_n) existe.

2. Soit (v_n) une suite telle que les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers le même réel ℓ. Montrer que la suite (u_n) converge vers ℓ.
Soit $\varepsilon > 0$ un réel.
Par convergence des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}), il existe deux rangs N_1 et N_2 tels que :

$$\text{Pour tout } n \geq N_1, |u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$$
$$\text{Et pout tout } n \geq N_2, |u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon$$

Pour tout $k \geq \max(2N_1, 2N_2 + 1)$, on a $|u_k - \ell| \leq \varepsilon$.
On peut donc conclure que la limite de la suite (u_n) existe et est égale à la limite commune des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

Exercice 8 (Limites et somme)**.**
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n + v_n$.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Que peut on dire de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. On suppose que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. Que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Donner un exemple de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergentes telles que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

Correction

1. D'après un théorème du cours, $\big(w_n\big)_n$ converge aussi.
2. Si $\big(w_n\big)_n$ ne converge pas, alors au moins une entre $\big(u_n\big)_n$ et $\big(v_n\big)_n$ ne converge pas (il s'agit juste de la contraposée de l'implication précédente). Rappel :
(i) La contraposée de $P \Longrightarrow Q$ est $(non\ Q) \Longrightarrow (non\ P)$.
(ii) $P \Longrightarrow Q$ est équivalente à sa contraposée.

3. Il suffit de prendre $u_n = n$ et $v_n = -n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 (Opérations sur les limites)**.**
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $w_n = u_n^2 + u_n v_n + v_n^2$ soit convergente vers 0.

1. En utilisant une identité remarquable, écrire w_n comme la somme de 2 carrés.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent aussi vers 0.

Correction

1. Pour tout n, on a :

$$w_n \;=\; u_n^2 + 2u_n\frac{1}{2}v_n + \frac{1}{4}v_n^2 + \frac{3}{4}v_n^2 \;=\; \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 + \frac{3}{4}v_n^2.$$

2. Du point précédent, on déduit que $w_n \geq 0$.
On a

$$0 \;\leq\; \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 \;\leq\; w_n \qquad (i)$$

et
$$0 \leq \frac{3}{4}v_n^2 \leq w_n$$
c'est à dire
$$0 \leq v_n^2 \leq \frac{4}{3}w_n \qquad (ii)$$
On a $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$. Le théorème des gendarmes appliqué à (ii) donne $\lim_{n\to+\infty} v_n^2 = 0$ et par suite $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

De même le théorème des gendarmes appliqué à (i) donne $\lim_{n\to+\infty} \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 = 0$ et par suite $\lim_{n\to+\infty} \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right) = 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ et que $u_n = \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right) - \frac{1}{2}v_n$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 10 (Suites presque géométriques)**.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

1. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 10$
   (a) Justifier qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} \geq 5u_n$.
   (b) Montrer qu'alors, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq 5^{n-N}u_N$.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
2. On suppose à présent que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$
   (a) Justifier qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.
   (b) En raisonnant comme avant, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge cette fois vers 0.

Correction

1.(a). Par définition de limite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_\varepsilon$, on a
$$10 - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 10 + \varepsilon\,.$$
Alors, il suffit de prendre $\varepsilon = 5$ et $N = N_\varepsilon$, et utiliser le fait que u_n est positif.

2ème méthode :

Comme $\lim_{\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 10$, alors à partir d'un certain rang N, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 5$, c'est à dire :
$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 5$.
Comme $u_n > 0$, alors :
$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_{n+1} \geq 5u_n$.

1.(b). Par récurrence sur $n \geq N$.
Soit $P(n)$: "$u_n \geq 5^{n-N}u_N$".
$P(N)$: "$u_N \geq 5^0 u_N$". Donc $P(N)$ est vraie.
On suppose $P(n)$ vraie pour n fixé.
$P(n+1)$: "$u_{n+1} \geq 5^{n+1-N}u_N$".
On a $u_{n+1} \geq 5u_n \geq 5 \cdot 5^{n-N}u_N = 5^{n+1-N}u_N$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
En conclusion $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq N$.
Ainsi pour tout $n \geq N$, $u_n \geq 5^{n-N}u_N$.

2ème méthode :
Pour tout $n \geq N+1$, on a :

$u_{N+1} \geq 5u_N$.
$u_{N+2} \geq 5u_{N+1}$.
...
...
...
...
$u_n \geq 5u_{n-1}$.

Multiplions ces inégalités membre à membre (en simplifiant mentalement), nous obtenons une nouvelle inégalité :
$u_n \geq 5^p u_N$
où p est le nombre de ces termes : $u_{N+1}, u_{N+2}, \dots u_n$. On a $p = n-(N+1)+1 = n-N$.
Donc $u_n \geq 5^{n-N} u_N$.
Or pour $n = N$, $u_n = u_N = 5^{n-N} u_N$".
Ainsi pour tout $n \geq N$, $u_n \geq 5^{n-N} u_N$.

1.(c). Il s'agit d'une simple conséquence du point précédent, avec le fait que $u_N > 0$ par hypothèse. En effet : Comme N est fixé alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^{n-N} = +\infty$. Comme $u_N > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^{n-N} u_N = +\infty$. Or $u_n \geq 5^{n-N} u_N$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2.(a). On applique encore une fois la définition de limite (comme on a fait au point 1.a. ci-dessus), avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$.

2ème méthode :

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, alors à partir d'un certain rang N, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$, c'est à dire :
$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$.
Comme $u_n > 0$, alors :
$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} u_n$.

2.(b). En raisonnant comme avant (par exemple par récurrence) , on prouve que $u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N} u_N$.

Comme N est fixé et que $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N} = 0$.

Comme $u_N > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N} u_N = 0$.

Or $0 \leq u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N} u_N$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 11 (Suite arithmético-géométrique).

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 8$ et la relation de récurrence $u_n = \dfrac{1}{2} u_{n-1} + 3$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Résoudre l'équation $\alpha = \dfrac{1}{2}\alpha + 3$.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \alpha$. Écrire v_n en fonction de v_{n-1}.
3. Déterminer v_n en fonction de n.

4. Déterminer u_n en fonction de n. Quelle est sa limite ?

Correction

1. $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 3 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\alpha = 3 \Longleftrightarrow \alpha = 6$.
2. On retranche membre à membre les égalités $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 3$ et $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 3$. On obtient $u_n - \alpha = \frac{1}{2}(u_{n-1} - \alpha)$.
   Ainsi $v_n = \frac{1}{2}v_{n-1}$.
3. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = 8 - 6 = 2$.
   Par suite $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. $v_n = u_n - \alpha = u_n - 6$. Donc $u_n = v_n + 6 = \frac{1}{2^{n-1}} + 6$.
   On en déduit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 6$.

Exercice 12 (Suites adjacentes)**.**
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

Correction

1. On remarque que $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$. Comme $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$ alors $\big(u_n\big)_n$ est croissante. En utilisant cette propriété, on peut écrire

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n\,(n+1)^2}\Big(n + n\,(n+1) - (n+1)^2\Big) = -\frac{2}{n\,(n+1)^2} < 0\,. \end{aligned}$$

   Donc $\big(v_n\big)_n$ est décroissante.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Comme $\big(u_n\big)_n$ est croissante et $\big(v_n\big)_n$ est décroissante, alors $\big(u_n\big)_n$ et $\big(v_n\big)_n$ sont des suites adjacentes, par suite les deux suites sont convergentes vers la même limite.

Exercice 13 (Suites adjacentes - Encore !)**.**
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les suites définies pour tout $n \geq 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
3. Étudier la suite $(v_n - u_n)$.

4. Que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n) ? De leur limite éventuelle ?

Correction

1. Pour tout $n \geq 1$, on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.
2. Soit n un entier naturel non nul. On calcule $v_{n+1} - v_n$:
$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} \\ &= \frac{n\cdot(n+1) + n - (n+1)^2}{n\cdot(n+1)\cdot(n+1)!} \\ &= \frac{-1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+1)!} \end{aligned}$$
Donc la suite (v_n) est strictement décroissante.
3. Pour tout $n \geq 1$, on a $v_n - u_n > 0$ et par ailleurs, $(v_n - u_n)$ tend vers 0.
4. Les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes : l'une est croissante, l'autre est décroissante, et leur différence tend vers 0.
Donc les deux suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et admettent la même limite (qui est égale à $e = \exp(1)$).

Exercice 14 (Encadrement)**.**
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geq 1$ par :
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que pour tout k entre 1 et n, on a :
$$\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}.$$
3. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, on a
$$\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}} \leq u_n \leq \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}.$$
4. Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite est égale à 1.

Correction

1. On a
$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.707, \qquad u_2 = \frac{2}{\sqrt{17}} + \frac{2}{\sqrt{18}} \simeq 0.956, \qquad u_3 = \frac{3}{\sqrt{82}} + \frac{3}{\sqrt{83}} + \frac{3}{\sqrt{84}} \simeq 0.988$$
2. Soit n un entier naturel non nul et k un entier entre 1 et n.
On a $\sqrt{n^4+1} \leq \sqrt{n^4+k} \leq \sqrt{n^4+n}$
D'où $\dfrac{n}{\sqrt{n^4+1}} \geq \dfrac{n}{\sqrt{n^4+k}} \geq \dfrac{n}{\sqrt{n^4+n}}$, qui est équivalent à
$$\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}.$$

3. En sommant ces inégalités pour k entre 1 et n, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}.$$

Donc

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}} \leq u_n \leq \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}.$$

4. On étudie d'abord les limites des suites $(\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}})$ et $(\frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}})$.

On a, pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}} = \frac{1}{\sqrt{1+n^{-3}}} \qquad \text{et} \qquad \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+n^{-4}}}$$

Donc les suites de terme général $(\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}})$ et $(\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}})$ sont toutes les deux convergentes et de limite égale à 1.
Par le théorème des gendarmes, on peut conclure que la suite (u_n) est également convergente et de limite 1.

Exercice 15 (Des suites de moyennes)**.** Soient a et b deux réels tels que $0 \leq a \leq b$. On considère les suites formées par les moyennes géométriques et arithmétiques successives.

On note ainsi : $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. On suppose dans cette question uniquement que $a = 0$. Expliciter les suites (u_n) et $v_n)$ en fonction de n et en déduire leur limite.
2. On suppose dans cette question uniquement que $a = b$. Étudier les suites u_n et v_n.
3. On suppose que a est strictement positif.
   (a) Montrer que, pour tout n, on a $a \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq b$ et $v_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.
   (b) En déduire que les suites (u_n) et $(v_n$ sont convergentes et admettent la même limite.

Correction

1. Avec $a = 0$, on a $u_0 = 0$, $v_0 = b$, $u_1 = 0$ et $v_1 = b/2$.
On peut montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, on a $u_n = 0$ et $v_n = b \cdot 2^{-n}$.
[Initialisation]. En effet, pour $n = 0$, on a boen $u_0 = 0$ et $v_0 = b \cdot 2^{-0}$.
[Hérédité]. Soit $n \geq 0$ un entier. Supposons que $u_n = 0$ et $v_n = b \cdot 2^{-n}$ et montrons que $u_{n+1} = 0$ et $v_{n+1} = b \cdot 2^{-(n+1)}$.
En effet : $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} = 0$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{v_n}{2} = b2^{-(n+1)}$.
[Conclusion]. La propriété est donc vraie au rang 0 et héréditaire, donc, par principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geq 0$: on a bien, pour tout $n \geq 0$, $u_n = 0$ et $v_n = b \cdot 2^{-n}$.
On a dans ce cas : $\lim u_n = 0$ et $\lim v_n = 0$.
2. Si $a = b$, on peut montrer par une récurrence immédiate que, pour tout $n \geq 0$, $u_n = a$ et $v_n = a$.
Les suites (u_n) et (v_n) sont donc des suites constantes et égales. Elles sont alors convergentes et de limite commne a.
3. On suppose que a est strictement positif.

(a) Notons, pour tout $n \geq 0$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $a \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq b$ et $v_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$. »
Montrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.
[Initialisation]. On a $u_0 = a$, $v_0 = b$, $u_1 = \sqrt{ab}$ et $v_1 = (a+b)/2$.
Puisque $0 \leq a \leq b$, on a bien $a \leq u_0 \leq u_1$ et $v_1 \leq v_0$.
De plus,

$$v_1 - u_1 = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2}{2} \geq 0.$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
[Hérédité]. Soit $n \geq 0$ un entier tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est également.
On a par hypothèse de récurrence : $u_{n+1} \leq v_{n+1}$ donc $u_n \leq u_{n+1} \leq u_{n+2}$ et $v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq v_n$.
De plus,

$$v_{n+2} - u_{n+2} = \frac{u_{n+1}+v_{n+1}-2\sqrt{u_{n+1}v_{n+1}}}{2} = \frac{\left(\sqrt{v_{n+1}}-\sqrt{u_{n+1}}\right)^2}{2} \geq 0.$$

On a donc montré que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée lorsque $\mathcal{P}(n)$ l'est.
[Conclusion] : $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée et la propriété est héréditaire donc, par principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

(b) La suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante, et la suite $(v_n - u_n)$ est géométrique de raison $1/2$ donc elle tend vers 0.
Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes, donc convergentes et admettent la même limite.

Exercice 16 (Moyenne de Cesàro).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante de limite ℓ. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{u_1 + ... + u_n}{n}.$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \ell$. En déduire que (v_n) converge.
3. On note ℓ' la limite de (v_n). Peut-on donner une inégalité entre ℓ et ℓ' ?
4. Établir que $v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, en déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ.

Correction

1. Soit n un entier. On calcule $v_{n+1} - v_n$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{nu_1 + \cdots + nu_n + nu_{n+1} - ((n+1)u_1 + \cdots + (n+1)u_n}{n(n+1))} \\ &= \frac{nu_{n+1} - u_1 - \cdots - u_n}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Or, la suite (u_n) est croissante donc, pour tout $k \leq n$, on a $u_k \leq u_{n+1}$, donc $v_{n+1} - v_n$ est positif.
La suite (v_n) est donc croissante.

2. La suite (u_n) est croissante et de limite ℓ donc, pour tout n, $u_n \leq \ell$.

   On en déduit que $v_n \leq \frac{n\ell}{n} = \ell$.

   La suite (v_n) est donc croissante et majorée (par ℓ) donc elle est convergente.
3. On a vu que, pour tout n, $v_n \leq \ell$, donc en passant à la limite, on peut conlcure que $\ell' \leq \ell$.
4. Soit $n \geq 1$. On a

$$\begin{aligned} v_{2n} &= \frac{u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n}}{2n} \\ &= \frac{1}{2}\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} + \frac{1}{2}\frac{u_{n+1} + \cdots + u_{2n}}{n} \\ &= \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}\frac{u_{n+1} + \cdots + u_{2n}}{n} \end{aligned}$$

   Or, par croissance de la suite (u_n), on a pour tout $k \geq n$, $u_k \geq u_n$.

   D'où

$$v_{2n} \geq \frac{v_n}{2} + \frac{u_n}{2}.$$

5. Les suites (v_n), (u_n) et (v_{2n}) sont convergentes, donc on peut passer à la limite dans cette inégalité.

   On obtient :

$$\ell' \geq \frac{\ell' + \ell}{2}.$$

   On en déduite que $\ell' \geq \ell$.

   Or on a montré dans la question 3. que $\ell' \leq \ell$. On peut donc conclure que $\ell' = \ell$: la suite (v_n) est convergente et de même limite que la suite (v_n).

Exercice 17 (Téléscopages !). 1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n > 0$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

   À l'aide de la question 1, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

__**Correction**__

1. Soit $k \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

On obtient : $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

Cela implique que $\big(u_n\big)_n$ est convergente de limite égale à 1.

Exercice 18 (Suite récurrente)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$.

1. Etudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x-1}$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Vérifier en particulier que $f([1, +\infty[) = [1, +\infty[$.
2. Justifier que, pour tout $n \geq 0$, u_n est bien défini et appartient à $[1, +\infty[$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Correction

1. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. On a $f(1) = 1$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ donc $f([1, +\infty[) = [1, +\infty[$.
2. On raisonne par récurrence : on note $\mathcal{P}_n$ la propriété :« u_n existe et appartient à $[1, +\infty[$ ».
   [Initialisation]. $\mathcal{P}_0$ est vraie car $u_0 \geq 1$.
   [Hérédité]. Soit $n \geq 0$ un entier tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.
   Alors u_n appartient à $[1, +\infty[$, donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini et appartient à $[1, +\infty[$.
   Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   [Conclusion]. La propriété est initialisée à $n = 0$ et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geq 0$: la suite (u_n) est bien définie et, pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \geq 1$.
3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{2u_n - 1} - u_n = \frac{(\sqrt{2u_n - 1} - u_n)(\sqrt{2u_n + 1} + u_n)}{\sqrt{2u_n + 1} + u_n} \\ &= \frac{2u_n - 1 - u_n^2}{\sqrt{2u_n - 1} + u_n} \\ &= -\frac{(u_n - 1)^2}{\sqrt{2u_n - 1} + u_n} < 0 \end{aligned}$$
   On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1 alors elle converge par le théorème de la convergence monotone. On note ℓ sa limite. On a ℓ qui vérifie la relation de récurrence d'où $\ell = \sqrt{2\ell - 1}$.
   $\ell = \sqrt{2\ell - 1} \iff \ell^2 = 2\ell - 1$ et $\ell \geq 0 \iff (\ell - 1)^2 = 0$ et $\ell \geq 0 \iff \ell = 1$.

Exercice 19. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_n = \sqrt{1 + u_{n-1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On notera f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et vérifie $0 \leq u_n \leq 2$.
2. Montrer par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Correction

1. Par récurrence posons P_n : "$0 \leq u_n \leq 2$".
   Initialisation : Pour $n = 0$ on a bien $u_0 = 1 \in [0, 2]$. Donc P_0 est vraie.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons P_n vraie, montrons que P_{n+1} est vraie.
   On a $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$. Comme $u_n \geq 0$ alors $1 + u_n \geq 0$. Donc u_{n+1} existe, $u_{n+1} \geq 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \leq \sqrt{1+2} = \sqrt{3} < 2$. Donc P_{n+1} est vraie et ainsi P_n est héréditaire.
   Conclusion : Comme P_0 est vraie et que P_n est héréditaire alors P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit R_n : "$u_n < u_{n+1}$". Montrons que R_n est vraie par récurrence.
   R_0 : "$u_0 < u_1$". Donc R_0 : "$1 < \sqrt{2}$". Ainsi R_0 est vraie.
   Soit $n \geq 0$ un entier. Supposons R_n vraie.
   Montrons que R_{n+1} : "$u_{n+1} < u_{n+2}$" est vraie.
   Comme R_n est vraie alors $u_n < u_{n+1}$, donc $1+u_n < 1+u_{n+1}$ et par suite $\sqrt{1+u_n} < \sqrt{1+u_{n+1}}$. Ainsi $u_{n+1} < u_{n+2}$. Donc R_{n+1} est vraie.
   En conclusion R_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par 2) alors par le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite. La limite vérifie la relation de récurrence d'où $\ell = \sqrt{1+\ell}$. Comme $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $\ell \geq 0$.
   On a $\ell^2 - \ell - 1 = 0$.
   On calcule le discriminant de ce trinôme : $\Delta = 5$. Donc les deux racines sont $\ell_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\ell_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   On remarque que $\ell_1 < 0$. Donc ℓ_1 ne convient pas.
   On a bien $\ell_2 \geq 0$, donc c'est la seule limite possible.
   Ainsi $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 20 (Dichotomie)**.** Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$. On suppose que $f(a) < f(b)$ et on se donne un réel λ de $]f(a), f(b)[$.

On construit deux suites (a_n) et (b_n) de la façon suivante :

— On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

— Puis, pour tout $n \geq 0$:

  — Si $\lambda < f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$;

  — Sinon, $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

On note encore, pour tout $n \geq 0$, $\mathcal{H}_n$ la propriété : « $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ et $f(a_{n+1}) \leq \lambda \leq f(b_{n+1})$ ».

1. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)$.
2. Énoncer la propriété $\mathcal{H}_0$ et montrer qu'elle est vérifiée.
3. Soit $n \geq 0$ un entier naturel tel que $\mathcal{H}_n$ est vérifiée. Montrer que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vérifiée.
4. Conclure que, pour tout $n \geq 0$, on a $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ et $f(a_{n+1}) \leq \lambda \leq f(b_{n+1})$.
5. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
6. Que peut-on en déduire ? Et concernant la limite de $(f(a_n))_n$ et de $(f(b_n))_n$?

Correction

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$. On suppose que $f(a) < f(b)$ et on se donne un réel λ de $]f(a), f(b)[$.

On note encore, pour tout $n \geq 0$, $\mathcal{H}_n$ la propriété : « $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ et $f(a_{n+1}) \leq \lambda \leq f(b_{n+1})$ ».

1. Soit $n \geq 0$ un entier.
   On raisonne par disjonction de cas :
   1er cas : $\lambda < f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)$. Dans ce cas, $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$, donc $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$.

<u>2ème cas :</u> $\lambda \geq f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)$. Dance ce cas, $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$, donc $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$.

On a donc, pour tout $n \geq 0$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$: la suite $(b_n - a_n)$ est géométrique de raison 1/2.

2. $\mathcal{H}_0$ s'écrit : « $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$ et $f(a_1) \leq \lambda \leq f(b_1)$ ».

   On raisonne par disjonction de cas : <u>1er cas</u> : $\lambda < f\left(\dfrac{a_0+b_0}{2}\right)$. Dans ce cas, on a :

   $a_1 = a_0 = a$ et $b_1 = \dfrac{a_0+b_0}{2}$ donc $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$ et $f(a_0) \leq \lambda \leq f(b_1)$.

   <u>2ème cas</u> : $\lambda \leq f\left(\dfrac{a_0+b_0}{2}\right)$. Dans ce cas, on a :

   $a_1 = \dfrac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b_0 = b$ donc $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$ et $f(a_0) \leq \lambda \leq f(b_1)$.

   Dans les deux cas, on a donc bien $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$ et $f(a_1) \leq \lambda \leq f(b_1)$: $\mathcal{H}_0$ est vérifiée.

3. Soit $n \geq 0$ un entier naturel tel que $\mathcal{H}_n$ est vérifiée. Montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vérifiée.
   On raisonne à nouveau par disjonction de cas :
   <u>1er cas :</u> $\lambda < f\left(\dfrac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}\right)$. Dans ce cas, $a_{n+2} = a_{n+1}$ et $b_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}$.
   Or, par hypothèse de récurrence, $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$.
   Donc on a $a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1}$.
   De plus, par choix de (a_{n+2}, b_{n+2}), on a $f(a_{n+1} = f(a_{n+2}) \leq \lambda \leq f(b_{n+2})$.
   <u>2ème cas :</u> $\lambda \geq f\left(\dfrac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}\right)$. Dance ce cas, $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}$ et $b_{n+2} = b_{n+1}$.
   Or, par hypothèse de récurrence, $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$.
   Donc on a $a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1}$.
   De plus, par choix de (a_{n+2}, b_{n+2}), on a $f(a_{n+2}) \leq \lambda \leq f(b_{n+2}) = f(b_{n+1}$.

   Dans les deux, on aboutit donc à : $a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1}$ et $f(a_{n+2}) \leq \lambda \leq f(b_{n+2})$, docn la propriété $\mathcal{H}_{n+1}$ est vérifiée.

4. La propriété est initialisée pour $n = 0$ et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geq 0$.

5. La suite (a_n) est donc croissante et la suite (b_n) est décroissante. De plus, dans la question **1.** on a montré que la suite $(b_n - a_n)$ est géométrique de raison 1/2 donc elle tend vers 0.
   On peut donc conclure que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et qu'elles convergent vers la même limite que l'on notera ℓ.

6. Le réel ℓ appartient à l'intervalle $[a, b]$ car, pour tout n, on a $a \leq a_n \leq \ell \leq b_n \leq b$..
   Les suites $(f(a_n)$ et $(f(b_n))$ sont convergentes car (a_n) et (b_n) le sont et que f est continue sur $[a, b]$, et la limite de $(f(a_n)$ et de $(f(b_n))$ est égale à $f(\ell)$.
   On a également montré que, pour tout n, $f(a_{n+1}) \leq \lambda \leq f(b_{n+1})$ donc, en passant à la limite dans ces inégalités, $f(\ell) \leq \lambda \leq f(\ell)$.
   On a donc nécessairement $f(\ell) = \lambda$.
   Cette méthode permet donc de justifier que, si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et si λ vérifie $f(a) \leq \lambda \leq f(n)$, alors il existe un réel de l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(\ell) = \lambda$. Elle constitue donc une preuve du théorème des valeurs intermédiaires.
   Numériquement, cette méthode est intéressante (vitesse de convergence linéaire : pour un estimation à 10^{-k}, il faut un nombre d'étapes proportionnel à k).