Université Claude Bernard Lyon 1 — UE Fondamentaux des Mathématiques I
Semestre d'automne 2018-2019

Examen final (2 h)

Lundi 17 décembre 2018

Préambule :
Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM** ainsi que le **NOM DE VOTRE CHARGÉ DE COURS** (M. Pujo-Menjouet, M. Ressayre ou M. Wagner). **TOUTE INFORMATION MANQUANTE SERA SANCTIONNÉE PAR 1 POINT EN MOINS.**
Documents et calculatrices ne sont PAS autorisés durant l'épreuve.
L'usage des téléphones est prohibé.
La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.

Le sujet comporte 4 exercices indépendants.

Exercice 1. *20 minutes*
On considère le polynôme suivant $A = X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 8X + 4$ dans $\mathbb{C}[X]$.

1. Calculer $B = A'/4$, où A' désigne la dérivée de A.
2. Vérifier avec l'algorithme d'Euclide que $pgcd(A,B) = X^2 + 2X + 2$.
3. Montrer, en se servant des deux questions précédentes, qu'il existe un polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$ de degré 2, tel que $A = P^2$.
4. En déduire les racines de A dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2. *40 minutes*
On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence de la façon suivante

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1, \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n + 2v_n}{3}, \ n \in \mathbb{N}, \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 12, \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_n + 3v_n}{4}, \ n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

1. Montrer que $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1/12$ dont il faudra préciser également le premier terme.
2. En déduire l'expression de la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.
6. On pose $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = 3u_n + 8v_n$.
   (a) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
   (b) En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3. *40 minutes*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} (3-x^2)/2, & \text{si } x < 1, \\ 1/x, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et plus particulièrement en 1.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et plus particulièrement en 1.
3. Rappeler le théorème des accroissements finis.
4. Utiliser ce théorème pour montrer qu'il existe $c \in]0,2[$ tel que $2f'(c) = f(2) - f(0)$.
5. Déterminer toutes les valeurs possibles de c.

Exercice 4. *20 minutes*

1. Exprimer le nombre complexe $z_1 = e^{17i\pi/6}$ sous la forme algébrique $\frac{a}{2} + i\frac{b}{2}$ avec a et $b \in \mathbb{R}$ à déterminer.
2. On considère le complexe $z_2 = 1 + i$.
   (a) Montrer que la racine carrée de $z_2 = 1 + i$ de partie imaginaire positive sous la forme algébrique $c + id$ avec $c = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$ et $d = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$.
   (b) Donner le module et un argument de z_2 et écrire z_2 sous forme exponentielle.
   (c) En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.