Université Claude Bernard Lyon 1 | UE Fondamentaux des maths I
Semestre d'automne 2018-19 | Groupe Math

Examen 3 – Durée 55 min – le jeudi 8 décembre 2018

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
Les **réponses mal justifiées** ne permettront pas d'obtenir tous les points.
BIEN INDIQUER SON NUMÉRO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE
L'énoncé comporte 5 exercices.

Exercice 1. Nombres composés consécutifs.
Soit $N \geqslant 2$ un entier naturel. Montrer qu'aucun des N entiers consécutifs suivants n'est premier

$$(N+1)!+2, (N+1)!+3, \ldots, (N+1)!+N+1.$$

Exercice 2. Division euclidienne.
Soit n un entier naturel impair. Montrer que le reste de la division euclidienne de n^2+1 par 8 vaut 2.

Exercice 3. Calculs modulo 13

1. Montrer que $3^3 \equiv 1$ [13].
2. Montrer que 12 est le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que
$$2^k \equiv 1 \ [13].$$
3. En déduire que 13 divise $2^{70}+3^{70}$.

Exercice 4. Zéros de fonctions
Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. Considérons la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} [1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n - x - 1. \end{array}$$

1. Justifier la continuité f_n.
2. On admet que f_n est strictement croissante. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in [1;+\infty[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
3. En remarquant que $f_{n+1}(x_n) \geqslant 0$, montrer que $x_{n+1} \leqslant x_n$.

Exercice 5. Question préparée. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Montrer que

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

Liste de Questions de cours ou préparées pour le DS3.

1. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Montrer que

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

2. Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) < 0 < f(1)$. Démontrer qu'il existe $c \in]0;1[$ tel que $f(c) = 0$.
   Il s'agit d'adapter la preuve du théorème des valeurs itermédiaires dans ce cas.
3. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
4. Enoncer et démontrer le théorème de Gauss pour les entiers.

CORRIGÉ

Exercice 1. Pour tout $2 \leqslant k \leqslant N+1$, k divise $(N+1)!$ et donc $(N+1)!+k$. Comme $(N+1)!+k > k$, ceci implique que $(N+1)!+k$ n'est pas premier.

Exercice 2. Il s'agit de montrer qu'il existe q dans $\mathbb{Z}$ tel que $n^2+1 = 8q+2$. Ceci équivaut à ce que n^2-1 soit divisible par 8. Or $n^2-1 = (n-1)(n+1)$. Comme n est impair, $n-1$ et $n+1$ sont deux nombres pairs « consécutifs ». Donc l'un des deux est divisible par 4. Donc leur produit est divisible par 8.

Exercice 3.

1. On a : $3^3 = 27 = 2*13+1 \equiv 1[13]$.
2. On calcule successivement les puissances de 2 modulo 13 :

$$2^1 = 2 \equiv 2[13] \quad 2^2 = 4 \equiv 4[13] \quad 2^3 = 8 \equiv 8[13] \quad 2^4 = 16 \equiv 3[13] \quad 2^5 = 32 \equiv 2*3 \equiv 6[13]$$

$$2^6 = 32 \equiv 2*6 \equiv 12[13] \quad 2^7 = 64 \equiv 2*12 = 24 \equiv 11[13] \quad 2^8 = 128 \equiv 2*11 = 22 \equiv 9[13]$$

$$2^9 = 256 \equiv 2*9 = 18[13] \quad 2^{10} = 512 \equiv 2*5 = 10[13] \quad 2^{11} \equiv 2*10 \equiv 7[13]$$

   et finalement,

$$2^{12} \equiv 2*7 \equiv 1[13]$$

   2^{12} est bien la première puissance de deux congrue à 1 modulo 13.
3. On a $70 = 3*23+1 = 12*5+10$ et

$$2^{70}+3^{70} = (2^{12})^5 * 2^{10} + (3^3)^{23} * 3 \equiv 1^5 * 2^{10} + 1^{23} * 3 \equiv 10+3 \equiv 0[13]$$

   Donc 13 divise $2^{70}+3^{70}$.

Exercice 3.

1. La fonction f_n est la restriction d'un polynôme. Elle est donc continue.
2. On a $f_n(1) = -1 < 0$ et $f_n(2) = 2^n - 3 > 0$. Comme f est continue, le TVI implique l'existence de $x_n \in [1;2]$ tel que $f_n(x_n) = 0$. Comme f_n est strictement croissante un tel x_n est unique.
3. On a $f_{n+1}(x_n) = x_n^n * x_n - x_n - 1 = (x_n+1)x_n - x_n - 1 = x_n^2 - 1 \geqslant 0$ car $x_n \geqslant 1$.
   Le TVI entre 1 et x_n montre qu'il existe $y \in [1; x_n]$ tel que $f_{n+1}(y) = 0$. L'unicité implique que $y = x_{n+1}$. Donc $x_{n+1} \in [1; x_n]$ et $x_{n+1} \leqslant x_n$.

Exercice 4. On a :

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2). \end{aligned}$$

Or

$$\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \leqslant |z_1\bar{z}_2| = |z_1 z_2|. \tag{0.1}$$

Donc

$$|z_1+z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 z_2| = (|z_1|+|z_2|)^2$$

Comme $\sqrt{\ }$ est croissante et $|z_1+z_2|$ et $|z_1|+|z_2|$ appartiennent à $\mathbb{R}^+$, on en déduit que

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|.$$