Corrigé des Questions préparées pour le DS1.

1. *Soit* $a_0, \dots, a_n$ *des nombres réels. Montrer que*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k - a_{k-1} = a_n - a_0.$$

En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Pour la première partie, on sépare en deux sommes et réindexe :

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k - a_{k-1} &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \\
&= \textstyle a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k - (a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k) \\
&= a_n - a_0.
\end{aligned}$$

Pour la seconde assertion, on écrit

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Lorsqu'on applique la première assertion avec $a_k = -\frac{1}{k+1}$, on trouve

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = a_n - a_0 = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

2. *Soit* E *un ensemble. Soit* A, B *et* C *trois parties de* E. *Montrer que*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

On raisonne par double inclusion. Soit $x \in A \cup (B \cap C)$.
Si $x \in A$, il est clair que $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$. Donc $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Sinon, $x \notin A$ et $x \in B \cap C$. il est clair que $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$. Donc $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Ainsi

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Réciproquement soit $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Supposons que $x \notin A$ et montrons que $x \in B \cap C$.
Comme $x \in (A \cup B)$ et $x \notin A$ on a $x \in B \subset A \cup B$. De même, $x \in A \cup C)$.
Ainsi, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
On vient de montrer que

$$(A \cup B) \cap (x \in A \cup C) \subset A \cup (B \cap C).$$

On a donc montré que

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

3. *Soit E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soit A et B deux parties de F. Montrer que*
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

   Soit $x \in f^{-1}(A \cap B)$. Alors $f(x) \in A \cap B$. Comme $f(x) \in A$, $x \in f^{-1}(A)$. De même $x \in f^{-1}(B)$. Donc $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Ainsi, $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
   Réciproquement, soit $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Alors $f(x)$ appartient à A et B. Donc $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Ainsi, $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B)$.
4. *Soit E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soit A et B deux parties de E. Montrer que*
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$
   Donner un exemple pour lequel
$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

   Soit $y \in f(A \cap B)$. Il existe $x \in A \cap B$ tel que $f(x) = y$. Mais alors $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$. D'où l'inclusion à montrer.
   On prend $E = \{0, 1\}$, $A = \{0\}$, $B = \{1\}$ et f constante. Alors $f(A \cap B)$ est vide mais $f(A) \cap f(B)$ est le singleton réduit à la constante $f(0) = f(1)$.
5. *Soit a et b dans $\mathbb{R}$ et n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer par récurence sur n que*
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$
   On pourra utiliser sans démonstration la formule du triangle de Pascal suivante :
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

   C'est une récurrence.
   Initialisation. Pour $n = 1$, on trouve du côté gauche $a + b$ et du côté droit
$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^{1-1} = b + a.$$
   Hérédité. Fixons $n \geqslant 1$ et supposons la formule vrai pour n et montrons là au rang $n+1$. On a
$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b).(a+b)^n \\ &= (a+b).\textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\end{aligned}$$
   Dans la première de ces sommes on change d'indice ($k' = k + 1$) :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k}$$

En mettant à part les indicies $n+1$ et 0 on trouve :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \binom{n}{n+1-1} a^{n+1} b^{n+1-n-1} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0} + \textstyle\sum_{k=1}^{n} (\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}) a^k b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \textstyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$