Correction Feuille 8 : Limites et continuité des fonctions

Exercice 8-1 Soit $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq -1 \\ x^2+1 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \sin(x/4) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

1. Dessiner le graphe de f.

2. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to -1-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ e) $\lim\limits_{x\to \pi-} f(x)$
b) $\lim\limits_{x\to -1+} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to \pi+} f(x)$

Est-ce que les limites suivantes existent ? Si oui donner leur valeur.

a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to \pi} f(x)$

Correction exercice 8-1

Par définition de f, on a :

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (-2x) = 2\,, \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^2+1) = 2\,.$$

De façon analogue, on a :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2+1) = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sin(x/4) = 0$$
$$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to \pi^-} \sin(x/4) = \sqrt{2}/2\,, \qquad \lim_{x\to \pi^+} f(x) = \lim_{x\to \pi^+} \sin(x/4) = \sqrt{2}/2\,.$$

On en déduit que les limites (a) et (c) existent, et elles valent respectivement 2 et $\sqrt{2}/2$, tandis que la limtie (b) n'existe pas.

Exercice 8-2 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x+5}{x-4}$
4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^9-17}{x^7}$ 5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^3-5x^2+7}{8+2x-5x^3}$ 6) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+3}{x^3+2}$
7) $\lim\limits_{x\to 1} |x-1|$ 8) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{|x-1|}$ 9) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1}{|x-1|}$
10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+x}-1}$ 11) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^2}\right)$ 12) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x+5}-x$
13) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$ 14) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(\dfrac{1}{x})$ 15) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+\sin x}{x^2+\cos x}$
16) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$ 17) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1+2\sin(x)}{1+\sqrt{x}}$ 18) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{x-\sin x}$

Correction exercice 8-2

1. On a $x^2-4 = (x-2)(x+2)$, d'où

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+2) = 4\,.$$

2. Décomposer $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ et $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$ et simplifier.
3. La limite n'existe pas : étudier la limite quand $x \to 4^-$ et $x \to 4^+$.
4. La limite vaut $+\infty$ (comparér les puissances les plus élévées au numérateur et au dénominateurs).

5. Comme le précédent : la limite vaut $-3/5$.
6. Encore comme le précédent. La limite vaut 0.
7. 0.
8. $+\infty$.
9. $1/4$.
10. En multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{1+x}+1$, on trouve que
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}-1} = \frac{\sqrt{1+x}+1}{(1+x)-1} = \frac{\sqrt{1+x}+1}{x},$$
d'où on trouve que la limite n'existe pas ($x \to 0^+$ et $x \to 0^-$).
11. On a
$$\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} = \frac{x}{(1-x)(1+x)},$$
d'où c'est simple à voir que la limite n'existe pas.
12. On a
$$\sqrt{x^2+2x+5} - x = \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+2x+5}+x} = \frac{2x+5}{x\left(\sqrt{1+(2/x)+(5/x^2)}+1\right)} \longrightarrow_{x\to+\infty} 1\,.$$
13. 0.
14. 0.
15. Il faut mettre en facteur, au numérateur et au dénominateur, les quantités qui convergent à l'infini plus rapidement que les autres. On trouve donc que la limite vaut 1.
16. On écrit
$$x^x = e^{x\ln x} \longrightarrow_{x\to 0^+} e^0 = 1\,.$$
17. 0.
18. $+\infty$.

Exercice 8-3 Rappelons que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et que $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}$	2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$	3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$
4) $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{\cos(\pi x)}{1-2x}$	5) $\lim\limits_{x\to 1/2} (2x^2+x-1)\tan(\pi x)$	6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$
7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}$	8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln^3 x$	9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(\ln^2 x)}{x^n}$, $n\in\mathbb{Z}$

Correction exercice 8-3

1. On a
$$\frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}} = \frac{\sin(2x)}{2x}2\sqrt{x} \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } x\to 0.$$
2. Du moment que $\sin x/x \to 1$ quand $x \to 0$ et que $x\sin(1/x) \to 0$, on a que la deuxième limite vaut 0.
3. Par définition de la fonction tan, on a
$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x}\cos x \longrightarrow \cos(0) = 1 \qquad \text{quand } x\to 0.$$
4. On change la variable en posant $1-2x = y$, et donc $x = (1-y)/2$. En utilisant que $\cos(\pi/2-\alpha) = \sin(\alpha)$ (faire une dessin pour le prouver), on a
$$\lim_{x\to 1/2}\frac{\cos(\pi x)}{1-2x} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{\frac{\pi}{2}y}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

5. De façon similaire, on commence par noter que $2x^2+x-1=(2x-1)(x+1)$. On pose alors $2x-1=y$, d'où $x=(1+y)/2$. Grâce aux formulares $\sin(\alpha+\pi/2) = \cos(\alpha)$ et $\cos(\alpha+\pi/2) = -\sin(\alpha)$, on trouve alors

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1/2}(2x^2+x-1)\tan(\pi x) &= \lim_{y\to 0} y\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}y\right)\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}y\right)} \\ &= \lim_{y\to 0}\frac{y}{2}(3+y)\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)} \\ &= \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}y}{\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)}\frac{-(3+y)}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) = -\frac{3}{\pi}.\end{aligned}$$

6. On peut écrire

$$\frac{\cos x-1}{x^2} = \frac{\cos^2 x-1}{x^2(1+\cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x} \longrightarrow \frac{1}{2} \qquad \text{quand } x\to 0.$$

7. Quand $x\to 0$, on a

$$\frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\frac{x^2}{\sin^2 x} \longrightarrow 1.$$

8. La limite vaut 0 par croissances comparées.
9. On a $x^n = \exp(n\ln x)$, d'où on trouve

$$\frac{\exp(\ln^2 x)}{x^n} = \exp\left(\ln x\big(\ln x - n\big)\right).$$

On en déduit que la limite vaut $+\infty$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

Exercice 8-4

1) Si $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-5}{x-2}=5$, trouver $\lim_{x\to 2} f(x)$. 2) Si $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=-2$, trouver $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.

Correction exercice 8-4

La première limite vaut 5, la deuxième vaut 0. Pour le voir, on peut :

— soit raissoner par l'absurde : si le numérateur ne tend pas à 0, la limite ne peut pas être finie (car le dénominateur tend à 0) ;

— soit en utilisant la définition de limite.

Exercice 8-5 Étudier la continuité à gauche, la continuité à droite et la continuité des fonctions suivantes en chaque point de leur domaine de définition.

1. $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } 0\le x\le 1\\ 2x-1 & \text{si } 1<x\le 2\end{cases}$
2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x+\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=1$.
3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=xE(1/x)$ si $x\neq 0$ et $f(0)=1$, où E dénote la partie entière.

Correction exercice 8-5

1. Pour tout $x\in]0,1[$, $f(x)=x^2$ coïncide avec une fonction continue, donc elle est continue en tout point de $]0,1[$; le même argument s'applique à tout point dans $]1,2[$. En plus, pour la même raison on a que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0 = f(0)$, donc f est continue à droite en 0 ; de façon pareil, on voit que f est continue à gauche en 2. Finalement, on a

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1 = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(2x-1) \qquad \text{et} \qquad f(1)=1\,,$$

donc f est continue aussi en 1.

2. Le même argument de l'exercice précédent montre que f est continue en tout point $x \neq 0$. Considérons maintenant le cas $x = 0$. On rappelle que $\sqrt{x^2} = |x|$. Donc

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+1) = 1, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x-1) = -1\,.$$

On en déduit que f n'est pas continue en 0.

3. On commence par étudier la continuité en 0. Si $x > 0$, par définition de partie entiŕe on a $E(1/x) \leq 1/x < E(1/x) + 1$, qui implique que

$$0 \leq xE(1/x) \leq 1 < xE(1+x) + x \leq 1 + x.$$

Par le théorème des gendarmes, on trouve alors que $xE(1/x) \to 1$ pour $x \to 0^+$. La même inégalité de départ montre, en inversant les signes d'inégalité quand on multiplie par x, que aussi la limite pour $x \to 0^-$ vaut 1. Donc la fonction est continue en 0.
Après, on remarque que pour tout $x > 1$ on a $E(1/x) = 0$, ce qui implique que $f(x) = 0$ pour tout $x > 1$. Alors on a $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$. En revanche, quand $x \to 1^-$ on a $E(1/x) = 1$, d'où on déduit que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$. Donc, f n'est pas continue en 1. Le même argument montre que les points $1/n$, avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sont des points de discontinuité pour f.
Enfin, la continuité de f pour les $x < 0$ peut être déduite du discours précédent, en utilisant que, pour tout $x > 0$, on a $E(-x) = -E(x) - 1$.

Exercice 8-6

1. Déterminer les valeurs de $k \in \mathbb{R}$ pour lesquelles f_k définie par $f_k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ k - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ est une fonction continue.
2. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \dfrac{1+x^3}{1+x}$. Trouver une application continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g|_{\mathbb{R}\setminus\{-1\}} = f$

Correction exercice 8-6

Exercice 8-7 Montrer que l'équation $x^3 - 15x + 1 = 0$ a trois solutions dans l'intervalle $[-4, 4]$.

Correction exercice 8-7

Exercice 8-8 Montrer qu'il existe $x \in [3\pi/4, \pi]$ tel que

$$\tan x + \frac{x}{3} = 0.$$

Correction exercice 8-8

Exercice 8-9 Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors f est surjective.

Correction exercice 8-9

Exercice 8-10 Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues dont l'image est contenue dans $\mathbb{Z}$? dans $\mathbb{Q}$?

Correction exercice 8-10

Exercice 8-11 Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la fonction $f_n : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_n(x) = x^n - x - 1$$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n > 1$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.

3. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et converge vers une limite l.
4. Déterminer l.

Correction exercice 8-11

Exercice 8-12 Vrai ou faux ?

1. Si f est continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$, alors $f([a,b])$ est un intervalle fermé borné.
2. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a,b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a,b[)$ est un intervalle ouvert borné.
3. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a,b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a,b[)$ est un intervalle ouvert, mais pas forcément borné.
4. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a,b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a,b[)$ est un intervalle, mais pas forcément ouvert ni borné.

Correction exercice 8-12

Exercice 8-101 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-(x+1)$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$ 5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln^2 x-\sqrt{x}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$

7) $\lim\limits_{x\to 1+} \ln x \ln(\ln x)$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$ 9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\ln x + x}$

Exercice 8-102 Soit f une fonction décroissante sur $]0;+\infty[$ telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a $f(x) \geq 0$.
Exercice 8-103 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique qui admet une limite en $+\infty$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 8-104

1. Soient $n \in \mathbb{Z}$ un entier impair et $a_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{0,1,2,\ldots,n\}$. Montrer que l'équation $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ admette une solution réelle.
2. Donner un contre-exemple pour le cas n est pair.

Exercice 8-105 Supposons que f est une fonction continue sur $[0,1]$ et que $0 \leq f(x) \leq 1$ pour chaque $x \in [0,1]$. Montrer qu'il existe un $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = c$. (Indication : si $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$ alors on a un tel point c, sinon appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction définie par $g(x) = f(x) - x$.)

Exercice 8-106 Étudier la continuité de la fonction $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin(\pi/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, sur le domaine de définition.

Exercice 8-107 Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles g_m définie par $g_m(x) = \begin{cases} x-m & \text{si } x \leq 3 \\ 1-mx & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ est une fonction continue.

Exercice 8-108

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer que f est bornée.
2. En utilisant le résultat précédent, calculer la limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x(\sin^8 x + \cos^{14} x)}$$

Exercice 8-109 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice 8-110 Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et f une application de $[a,b]$ vers $[a,b]$.

1. On suppose que pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ on a

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

Montrer que f est continue. En déduire qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

2. On suppose maintenant que pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ avec $x \neq y$ on a

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

Montrer qu'il existe un unique $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 8-111 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I.

1. Soit $a \in I$. Donner une raison pour laquelle :

$$(\lim_{x \to a} f(x) = f(a)) \Rightarrow (\lim_{x \to a} |f(x)| = |f(a)|)$$

2. En utilisant la question précédente, montrer que si f et g sont continues, alors $\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ l'est aussi.