Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2020-2021

Fondamentaux des mathématiques I 16 décembre 2020. Durée : 2 heures

---

TITRE À PRÉCISER PAR QUELQU'UN QUI COMPREND LES MODALITÉS D'EXAMEN

Les exercices sont indépendants les uns des autres

Exercice 1 On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les deux suites réelles respectivement définies par :

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1} \qquad \text{et} \qquad v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$$

Observer que u_0 et v_0 ne sont pas définis.

1) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante.

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante.

3) Soit $x \geq 0$ et $h > 0$ deux nombres réels. En utilisant un théorème du cours et dont on prendra soin de vérifier les hypothèses, montrer qu'il existe $c \in]x; x+h[$ tel que

$$\sqrt{x+h} - \sqrt{x} = \frac{h}{2\sqrt{c}} \leq \frac{h}{2\sqrt{x}}.$$

4) En déduire que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites convergentes.

Exercice 2

On définit une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x < 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Déterminer en quels points de $\mathbb{R}$ cette fonction est continue, et en quels points elle est dérivable.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante, d'inconnue z :

$$z^{2n+1} + 1 = 0.$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante, d'inconnue z :

$$1 - z + z^2 - z^3 + \cdots - z^{2n-1} + z^{2n} = 0.$$

Exercice 4

1) Montrer l'existence de deux entiers relatifs a et b dans $\mathbb{Z}$ pour lesquels :

$$13a + 10b = 1.$$

T. S.V.P.

2) Expliciter deux entiers relatifs a et b dans $\mathbb{Z}$ pour lesquels :

$$13a + 10b = 1.$$

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante, d'inconnue (x, y) :

$$13x + 10y = 1.$$

4) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante, d'inconnue u :

$$20u \equiv 2 \quad [13].$$

Exercice 5

On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$.

1) Calculer j^3 puis montrer que $j^2 + j + 1 = 0$.

2) Expliciter deux racines réelles de P.

3) Montrer que j est une racine au moins double de P.

4) Déterminer le degré et le coefficient dominant de P.

5) Expliciter les décompositions en facteurs irréductibles de P, d'abord dans $\mathbb{C}[X]$ et ensuite dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6

On note f l'application de $\mathbb{R}[X]$ vers $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(P) = (P(1), P(2)).$$

1) a) Soit a et b deux réels. Calculer $f\left(a(X-1) + b(X-2)\right)$.

b) Montrer que l'application f est surjective.

2) On note (E_0) l'équation suivante, d'inconnue P dans $\mathbb{R}[X]$:

$$(E_0) \qquad f(P) = (0, 0)$$

a) Montrer que, réciproquement, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, si $(X-1)(X-2)$ divise P, alors P est solution de (E_0).

b) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, si P est solution de (E_0), alors $(X-1)(X-2)$ divise P. (On pourra utiliser la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)$).

c) Quelles sont les solutions de (E_0) ?

3) Résoudre l'équation suivante, d'inconnue P dans $\mathbb{R}[X]$:

$$(E) \qquad f(P) = (-1, 4)$$

(on pourra utiliser les deux questions précédentes).

4) Pour chaque d entier naturel, on note $\mathbb{R}_d[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à d et on note f_d la restriction de f, de l'ensemble $\mathbb{R}_d[X]$ vers $\mathbb{R}^2$.

a) Pour quelles valeurs de d l'application f_d est-elle surjective ?

b) Pour quelles valeurs de d l'application f_d est-elle injective ?