Université Claude Bernard Lyon 1 UE Fondamentaux des maths I Semestre d'automne 2018-19 Groupe Math

Examen 1 – Durée 45 min – le jeudi 4 octobre 2018

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
BIEN INDIQUER SON NUMÉRO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE
L'énoncé comporte 3 exercices et une question de cours.
LES QUESTIONS 2.5 ET 3.2 SONT HORS BAREME

Exercice 1. Sommes. (1 + 3 pts) Soit n un entier naturel. On considère la somme suivante

$$S := \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$$

1. Effectuer le changement d'indice $i = k + 1$;
2. En remarquant que $\frac{i}{i!} = \frac{1}{(i-1)!}$, en déduire que

$$S = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Exercice 2. Applications. (2 + 2 + 2+ 3 + 3 pts)

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 3x + 1$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2 - 1$. Calculer $f \circ g$.
2. En admettant que la fonction $h : [-3, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$, $x \longmapsto \sqrt{x+3}$ est bijective, calculer sa fonction réciproque $h^{-1} : [0, +\infty[\longrightarrow [-3, +\infty[$.
3. Soit E, F, G 3 ensembles et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Rappeler la définition de « f est injective ».
4. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f l'est.
5. On suppose que $g \circ f$ est injective. L'application g est-elle nécessairement injective ?

Exercice 3. Inégalités et valeurs absolues. (2 + 3 pts)

1. Décrire l'ensemble des nombres réels x tels que

$$|x - 3| \leqslant 7 \tag{0.1}$$

comme une réunion d'intervalles. En d'autres termes, résoudre l'inéquation (0.1).

2. Décrire l'ensemble des nombres réels x tels que

$$|x - 3| + |x + 4| \leqslant 7 \tag{0.2}$$

comme une réunion d'intervalles. En d'autres termes, résoudre l'inéquation (0.2).

Question de cours. (5 pts) Soit E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soit A et B deux parties de F. Montrer que

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Liste de Questions de cours pour le DS1.

1. Soit $a_0, \dots, a_n$ des nombres réels. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k - a_{k-1} = a_n - a_0.$$

En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

2. Soit E un ensemble. Soit A, B et C trois parties de E. Montrer que

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

3. Soit E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soit A et B deux parties de F. Montrer que

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

4. Soit E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soit A et B deux parties de E. Montrer que

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

Donner un exemple pour lequel

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

5. Soit a et b dans $\mathbb{R}$ et n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer par récurence sur n que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

On pourra utiliser sans démonstration la formule du triangle de Pascal suivante :

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

CORRIGÉ

Exercice 1. Sommes. (1 + 3 pts) Soit n un entier naturel. On considère la somme suivante

$$S := \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$$

1. Si $k=0$, $i=1$. Si $k=n$, $i=n+1$. Donc, comme $k=i-1$,

$$S := \sum_{i=1}^{n+1} \frac{i-1}{i!}.$$

2. De la question précédente, on déduit que

$$S := \sum_{i=1}^{n+1} \frac{i}{i!} - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i!}.$$

En utilisant l'indication, on a

$$S := \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(i-1)!} - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i!}.$$

On fait le changement d'indice $j=i-1$, dans la première somme :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(i-1)!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}.$$

Ainsi

$$S := \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i!}.$$

On reconnait deux sommes identiques sur des ensembles différents. On isole des termes pour que les sommes restantes soient exactement les mêmes :

$$S := 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} - \left((\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}) + \frac{1}{(n+1)!} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Exercice 2. Applications. (2 + 2 + 2+ 3 + 3 pts)

1. Par définition, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2-1) = 3(x^2-1)+1 = 3x^2-2.$$

2. Soit $y \in [0, +\infty[$. Posons $x = h^{-1}(y)$. Alors $h(x) = y = \sqrt{x+3}$. En élevant au carré, on obtient $y^2 = x+3$ et $x = y^2-3$. Ainsi

$$h^{-1}(y) = y^2 - 3.$$

3. L'application « f est injective » si et seulement si

$$\forall x, y \in E \qquad (f(x) = f(y)) \implies x = y.$$

4. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f l'est.
   Soit x et y dans E tels que $f(x) = f(y)$. En appliquant g on trouve $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Comme $g \circ f$ est injective, on en déduit que $x = y$.
   Finalement, f est injective.

5. La réponse est non. Un exemple est fourni par $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin(x)$ et $f :]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x$.
   Le phénomène est que l'image de f est trop petite pour révéler la non injectivité de g. D'ailleurs, on peut s'amuser à montrer que si de plus f est surjective alors g est injective :
   Si $g \circ f$ est injective et f est surjective alors g est injective.

Exercice 3. Inégalités et valeurs absolues. (2 + 3 pts)

1. Notons S l'ensemble des solutions. On distingue deux cas.
   Si $x \geqslant 3$ alors $|x-3| = x-3$. Alors l'inéquation (0.1) est équivalente à $x \leqslant 10$. Ainsi $S \cap [3; +\infty[= [3; 10]$.
   Si $x < 3$ alors $|x-3| = -x+3$. Alors l'inéquation (0.1) est équivalente à $x \geqslant -4$. Ainsi $S \cap]-\infty; 3[= [-4; 3[$.
   Finalement
   $$S = [3; 10] \cup [-4; 3[= [-4; 10].$$
2. On raisonne comme à la première question en distinguant les cas
   (a) $x < -4$;
   (b) $-4 \leqslant x \leqslant 3$;
   (c) $x > 3$.
   On trouve respectivement $\emptyset, [-4; 3]$ et $\emptyset$. Finalement
   $$S = [-4; 3].$$

Question de cours. (5 pts) On raisonne par double inclusion. Soit $x \in f^{-1}(A \cap B)$. Alors $f(x) \in A \cap B$. Donc $f(x) \in A$ et $x \in f^{-1}(A)$. De même $x \in f^{-1}(A)$. Donc $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
Réciproquement, soit $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Alors $f(x) \in A$ car $x \in f^{-1}(A)$. De même $f(x) \in B$ car $x \in f^{-1}(B)$. Donc $f(x) \in A \cap B$. Par définition, $x \in f^{-1}(A \cap B)$.

Voici quelques exemples de rédaction incorrectes.

1. Contexte : $f : E \longrightarrow F$ est une application donnée.
   « f est injective signifie soit $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$ alors $f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 = x_2$. »
2. Contexte : $f : E \longrightarrow F$ est une application donnée.
   « f est injective si $f(a) = f(b) \iff a = b$ »
3. « Si $|x+4| \geqslant 0$ »
4. Contexte : $f : E \longrightarrow F$ est une application donnée.
   « f est injective si il a un antécédant ou aucun antécédant. »
5. Contexte : $f : E \longrightarrow F$ est une application donnée et A est une partie de F.
   « Soit $x \in A$ tel que $f(x) = y$. »
6. Contexte : $f : E \longrightarrow F$ est une application donnée et A et B sont deux parties de F.
   « Soit $y \in A \cap B$ tel que $f(x) = y$ avec $x \inf{}^{-1}(A \cap B)$. »
7. Contexte : f et g sont des applications.
   « Il suffit de prendre un élément de $g \circ f$ et de montrer qu'il appartient à f »
8. « $f^{-1}(A \cap B) \implies f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ »
9. Contexte : $f : E \longrightarrow F$ est une application donnée sans propriété particulière et $x \in F$.
   « $f^{-1}(x)$ »
10.
11.
12.
13.
14.
15.