Université Claude Bernard Lyon 1 UE Fondamentaux des maths I
Semestre d'automne 2019-2020 Groupe Math

Examen 1 – Durée 45 min – le lundi 7 octobre 2019

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
BIEN INDIQUER SON NUMÉRO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE (A, B, C ou D)
L'énoncé comporte trois exercices et une question de cours.

Exercice 1. Sommes. (2 + 1 + 2 + 1 pts)

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$.
3. En déduire une expression de
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (3k^2 + 3k + 1)$$
comme un polynôme en n.
4. En déduire une expression de
$$T_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$$
comme un polynôme en n.

Exercice 2. Applications. (2 + 2 + 1 pts) Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par :

$$\begin{cases} f(p) = p & \text{si } p \geq 0 \\ f(p) = -p & \text{si } p < 0. \end{cases}$$

Déterminer, en le justifiant, si f est injective, surjective, bijective.

Exercice 3. Inégalités et logorithme. (2 + 2 pts) Soit x et y deux réels strictement positifs.

1. Simplifier
$$\exp\left(\frac{\ln(x) + \ln(y)}{2}\right).$$
2. En déduire que
$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{\ln(x) + \ln(y)}{2}.$$
On veillera à justifier toutes les implications utilisées.

Question de cours. (5 pts) Soit E un ensemble. Soit A, B et C trois parties de E. Montrer que

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Liste de Questions préparées pour le DS1.

1. Soit $a_0, \dots, a_n$ des nombres réels. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} a_k - a_{k-1} = a_n - a_0.$$
En déduire que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

2. Soit E un ensemble. Soit A, B et C trois parties de E. Montrer que
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

3. Soit E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soit A et B deux parties de F. Montrer que
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

4. Soit E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soit A et B deux parties de E. Montrer que
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$
Donner un exemple pour lequel
$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

5. Soit a et b dans $\mathbb{R}$ et n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer par récurence sur n que
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$
On pourra utiliser sans démonstration la formule du triangle de Pascal suivante :
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

6. Compléter le formulaire suivant :

$\sin(a+b) =$	$\cos(\pi - \alpha) =$	$(\tan t)' =$
$e^(x-y) =$	$\sin(\frac{\pi}{3}) =$	$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{(\ln x)^7} =$

Exercice 1. Sommes.

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$
Initialisation. Posons $n = 1$.
On vérifie que
$$\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 = 1$$
d'une part et que
$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1,$$
d'autre part. On a bien l'égalité cherchée.

Hérédité. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, et montrons que
$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$
On a
$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=0}^{n+1} k &= n + 1 + \textstyle\sum_{k=0}^{n} k \\ &= n + 1 + \tfrac{(n)(n+1)}{2} = \tfrac{2(n+1)}{2} + \tfrac{(n)(n+1)}{2} \\ &= \tfrac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

2. On développe le terme $(k+1)^3$ en utilisant le binôme de Newton :
$$\begin{aligned} (k+1)^3 - k^3 &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 \\ &= 3k^2 + 3k + 1 \end{aligned}$$

3. On a, d'après la question précédente et la formule du cours pour les séries téléscopiques :
$$\begin{aligned} S_n = \textstyle\sum_{k=0}^{n} 3k^2 + 3k + 1 &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 - k^3 \\ &= (n+1)^3. \end{aligned}$$

4. D'autre part si $L_n = \sum_{k=0}^{n} k$, on a :
$$\begin{aligned} S_n = \textstyle\sum_{k=0}^{n} 3k^2 + 3k + 1 &= 3\textstyle\sum_{k=0}^{n} k^2 - 3\textstyle\sum_{k=0}^{n} k + \textstyle\sum_{k=0}^{n} 1 \\ &= 3T_n + 3L_n + (n+1) \\ &= 3T_n + 3\tfrac{n(n+1)}{2} + n + 1 \end{aligned}$$
En égalant ces deux quantités, on obtient
$$(n+1)^3 = 3T_n + \frac{(3n+2)(n+1)}{2}$$
puis
$$T_n = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}.$$

Exercice 2. Applications.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $n \geqslant 0$, on vérifie que $f(n) = n$. Donc tout élément de $\mathbb{N}$ admet un antécédants et f est surjective.

On vérifie sans peine que $f(1) = 1$ et $f(-1) = --1 = 1$. Donc 1 et -1 ont la même image : f n'est pas injective.

Comme f n'est pas injective, elle n'est pas bijective.

Exercice 3. Inégalités et log

1. Soient x et y deux réels strictement positifs. On a :

$$\begin{aligned} \exp(\tfrac{\ln(x)+\ln(y)}{2}) & \sqrt{\exp(\ln(x)+\ln(y))} \\ & = \sqrt{\exp(\ln(x)).\exp(\ln(y))} \\ & = \sqrt{xy}. \end{aligned}$$

2. Comme exp est strictement creoissante, l'égalité recherchée est équivalente à

$$\exp(\ln(\frac{x+y}{2})) \geqslant \exp(\frac{\ln(x)+\ln(y)}{2}).$$

En utilisant la question précédente ceci équivaut encore à

$$\frac{x+y}{2}) \geqslant \sqrt{xy}.$$

Ces deux quantités sont dtrictement positive et la fonction carré est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc l'égalité est équivalente à

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geqslant xy, \qquad \text{car } xy > 0 \text{ et donc } (\sqrt{xy})^2 = xy$$

ou encore à

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4xy \geqslant 0,$$

c'est-à-dire à

$$(x-y)^2 \geqslant 0.$$

Comme cette dernière égalité est évidente, on a terminé la démonstration.

Question de cours. (5 pts) On raisonne par double inclusion. Soit $x \in A \cup (B \cap C)$. Si $x \in A$, il est clair que $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$. Donc $x \in (A \cup B) \cap (x \in A \cup C)$. Sinon, $x \notin A$ et $x \in B \cap C$. il est clair que $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$. Donc $x \in (A \cup B) \cap (x \in A \cup C)$. Ainsi

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (x \in A \cup C).$$

Réciproquement soit $x \in (A \cup B) \cap (x \in A \cup C)$. Supposons que $x \notin A$ et montrons que

$x \in B \cap C$. Comme $x \in (A \cup B)$ et $x \notin A$ on a $x \in B \subset A \cup B$. De même, $x \in A \cup C$). Ainsi, $x \in (A \cup B) \cap (x \in A \cup C)$. On vient de montrer que

$$\subset (A \cup B) \cap (x \in A \cup C) \subset A \cup (B \cap C).$$

On a donc montré que

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (x \in A \cup C).$$

Voici quelques exemples de rédaction incorrectes.

i. Contexte : $f : E \longrightarrow F$ est une application donnée.
« f est injective signifie soit $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$ alors $f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 = x_2$. »

ii. Contexte : $f : E \longrightarrow F$ est une application donnée.
« f est injective si $f(a) = f(b) \iff a = b$ »

iii. « Si $|x + 4| \geqslant 0$ »

iv. Contexte : $f : E \longrightarrow F$ est une application donnée.
« f est injective si il a un antécédant ou aucun antécédant. »

v. Contexte : $f : E \longrightarrow F$ est une application donnée et A est une partie de F.
« Soit $x \in A$ tel que $f(x) = y$. »

vi. Contexte : $f : E \longrightarrow F$ est une application donnée et A et B sont deux parties de F.
« Soit $y \in A \cap B$ tel que $f(x) = y$ avec $x \inf^{-1}(A \cap B)$. »

vii. Contexte : f et g sont des applications.
« Il suffit de prendre un élément de $g \circ f$ et de montrer qu'il appartient à f »

viii. « $f^{-1}(A \cap B) \implies f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ »

ix. Contexte : $f : E \longrightarrow F$ est une application donnée sans propriété particulière et $x \in F$.
« $f^{-1}(x)$ »

x.

xi.

xii.

xiii.

xiv.

xv.