Université Claude Bernard Lyon 1 | UE Fondamentaux des maths I
Semestre d'automne 2020-2021 | Groupe Math

Corrigé du premier examen (8 octobre 2020)

Exercice 1. Une équation.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante, d'inconnue t :

$$|t+1|+|4-t|=5.$$

CORRECTION

Soit t un réel, alors :
* si $t<-1$, $|t+1|+|4-t|=-(t+1)+(4-t)=-2t+3$. Puis comme $1<-t$, $2\times 1+3<2\times(-t)+3$, autrement dit $5<|t+1|+|4-t|$. Le réel t n'est donc pas solution de l'équation ;
* si $-1\leq t\leq 4$, $|t+1|+|4-t|=(t+1)+(4-t)=5$. Le réel t est donc solution de l'équation ;
* si $4<t$, $|t+1|+|4-t|=(t+1)-(4-t)=2t-3$. Puis comme $4<t$, $2\times 4-3<2t-3$, autrement dit $5<|t+1|+|4-t|$. Le réel t n'est donc pas solution de l'équation.

On conclut que l'ensemble des solutions est l'intervalle $[-1,4]$.

Exercice 2. Une inéquation.
Résoudre dans $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ l'inéquation suivante, d'inconnue x :

$$\frac{x+4}{x-2}\leq 8-x.$$

CORRECTION

Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, alors :

$$\begin{aligned}
&\frac{x+4}{x-2}\leq 8-x\\
\iff &\frac{x+4}{x-2}+x-8\leq 0\\
\iff &\frac{x+4+(x-8)(x-2)}{x-2}\leq 0\\
\iff &\frac{x^2-9x+20}{x-2}\leq 0\\
\iff &\frac{(x-4)(x-5)}{x-2}\leq 0.
\end{aligned}$$

On dresse alors un tableau de signes, en mettant en relief les passages de la variable x par les trois valeurs pertinentes, ici 2, 4 et 5, et on conclut que l'ensemble des solutions est $]-\infty,2[\cup[4,5]$.

Exercice 3. Une application.
On note $D =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, autrement dit $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0 \text{ et } v > 0\}$.
Soit $f : D \longrightarrow D$ définie par :

$$f(u, v) = \left(e^{e^u}, u + v\right).$$

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?

CORRECTION

1) Soit (u', v') et (u'', v'') deux éléments de D, et supposons que $f(u', v') = f(u'', v'')$, c'est-à-dire que :

$$\left(e^{e^{u'}}, u' + v'\right) = \left(e^{e^{u''}}, u'' + v''\right).$$

On en déduit tout d'abord que $e^{e^{u'}} = e^{e^{u''}}$, puis que $e^{u'} = e^{u''}$ et enfin que $u' = u''$ (en utilisant l'injectivité de l'exponentielle ou, ce qui revient au même, en appliquant la fonction logarithme).
On revient alors à l'information portant sur les deuxièmes composantes, c'est-à-dire à l'identité $u' + v' = u'' + v''$ et on en déduit que $v' = v''$ puis que $(u', v') = (u'', v'')$.

Ceci prouve l'injectivité de f.

2) Soit (u, v) un élément de D. On observe que $0 < e^u$ puis que $1 < e^{e^u}$. Cette observation entraîne que la première composante du couple $f(u, v)$ est nécessairement un réel strictement supérieur à 1 et donc que le couple $(1, 1)$ n'a aucun antécédent par f.

Ceci prouve que f n'est pas surjective.

Exercice 4. Applications et ensembles.
Soit E et F deux ensembles, B et C deux parties de F et g une application de E vers F.
On suppose g surjective.
Montrer que :

$$\left(g^{-1}(B) \subset g^{-1}(C)\right) \Rightarrow (B \subset C)$$

CORRECTION

Supposons que $g^{-1}(B) \subset g^{-1}(C)$.
Soit $y \in B$.
Comme g est surjective, on peut prendre un $x \in E$ tel que $g(x) = y$.
Par définition de $g^{-1}(B)$ et en se souvenant que $g(x) = y \in B$, $x \in g^{-1}(B)$.
Or on a supposé que $g^{-1}(B) \subset g^{-1}(C)$, et donc $x \in g^{-1}(C)$.
Par définition de $g^{-1}(C)$, $g(x) \in C$; autrement dit, $y \in C$.
Ceci prouve l'inclusion $B \subset C$.
Ceci prouve l'implication demandée.