

Examen 2 – Durée 45 min – le jeudi 8 novembre 2018

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.

La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

Les **réponses mal justifiées** ne permettront pas d'obtenir tous les points.

BIEN INDIQUER SON NUMÉRO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE

L'énoncé comporte 3 exercices.

Exercice 1. Argch. (13 pts : 1+2+2+1+2+3+2)

On rappelle que la fonction $\text{ch} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. Quelle est sa parité ?
2. Montrer que pour tout $y \in [1; +\infty[$, on a

$$y - \sqrt{y^2 - 1} \leq 1. \tag{0.1}$$

3. Justifier que la fonction

$$f : \begin{array}{ll} [0; +\infty[& \longrightarrow [1; +\infty[\\ x & \longmapsto \text{ch}(x) \end{array}$$

est bijective.

Notons $g : [1; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$ la fonction réciproque de f qui vérifie donc

$$g \circ \text{ch}(x) = x \quad \forall x \in [0; +\infty[. \tag{0.2}$$

On admettra que g est dérivable sur $]1; +\infty[$.

4. Soit $y \in]1; +\infty[$. Justifier l'existence et l'unicité de $x \in]0; +\infty[$ tel que $y = \text{ch}(x)$.
5. Montrer que

$$g'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}. \tag{0.3}$$

6. Montrer que

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$

7. Retrouver l'expression (0.3) de la dérivée de g à l'aide de la question précédente.

Exercice 2. Question préparée : une récurrence (4 pts)

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n + 3^n$$

Exercice 3. Question de cours (3 pts)

Donner la définition de $U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$, où $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle et l un nombre réel.

Liste de Questions de cours ou préparées pour le DS2.

1. Donner la définition de $U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$, où $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle et l un nombre réel.
2. En admettant, que la fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie

$$\begin{cases} \exp' = \exp \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$$

montrer que pour tout x et y dans \mathbb{R} , on a

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y).$$

3. Donner les domaines de définition et tracer les graphes des fonctions \ln , \tan et sh .
4. Soit a et b dans \mathbb{R} et n dans \mathbb{N}^* . Montrer par récurrence sur n que

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

On pourra utiliser sans démonstration la formule du triangle de Pascal suivante :

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

5. On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n + 3^n$$

CORRIGÉ

Exercice 1.

1. ch est paire car $\operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \operatorname{ch}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit $y \in [1; +\infty[$. Comme $y \geq 1$,

$$(y - 1)^2 = y^2 + 1 - 2y \leq y^2 + 1 - 2 = y^2 - 1.$$

Or la fonction $\sqrt{}$ est croissante, donc

$$\sqrt{(y - 1)^2} = |y - 1| \leq \sqrt{y^2 - 1}.$$

Comme $y \geq 1$, $|y - 1| = y - 1$. Donc

$$y - 1 \leq \sqrt{y^2 - 1}$$

et

$$y - \sqrt{y^2 - 1} \leq 1.$$

3. la fonction ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+,*}$. Elle est donc injective.
De plus, $\operatorname{ch}(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$ et ch est continue. Donc l'image de f est $[1, +\infty[$. Donc f est surjective.
Finalement f est bijective.
4. Comme f est bijective :

$$\forall y \in [1; +\infty[\quad \exists ! x \in [0; +\infty[\quad \operatorname{ch}(x) = y.$$

5. On part de l'identité

$$g \circ \operatorname{ch}(x) = x \quad \forall x \geq 0,$$

que l'on dérive par rapport à x :

$$\operatorname{sh}(x)g'(\operatorname{ch}(x)) = 1.$$

Posons $y = \operatorname{ch}(x)$. On obtient

$$g'(y) = \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}.$$

Or $\operatorname{sh}(x) \geq 0$ (car $x \geq 0$). Donc $\operatorname{sh}(x) = \sqrt{\operatorname{sh}^2(x)} = \sqrt{\operatorname{ch}^2(x) - 1}$. Ainsi

$$g'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

6. On a

$$2y = e^x + e^{-x}$$

et

$$2ye^x = (e^x)^2 + 1.$$

Posons $X = e^x$. On obtient $X^2 - 2yX + 1 = 0$. Résolvant cette équation de degré 2 en X on obtient

$$X = \sqrt{y^2 - 1} + y \quad \text{ou} \quad -\sqrt{y^2 - 1} + y.$$

Or $x \in]0, +\infty[$, donc $X = e^x \in]1, +\infty[$. Mais alors, la question 2 montre que $X \neq -\sqrt{y^2 - 1} + y$.
Donc

$$X = e^x = \sqrt{y^2 - 1} + y.$$

Appliquant \ln , on obtient

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$

7. On part de

$$g(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}),$$

que lon dérive :

$$g'(y) = \frac{1 + \frac{2y}{2\sqrt{y^2-1}}}{y + \sqrt{y^2-1}} = \frac{\frac{\sqrt{y^2-1}+y}{\sqrt{y^2-1}}}{y + \sqrt{y^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$

Exercice 2. On fait une récurrence double. Notons H_n l'assertion

$$U_n = 2^n + 3^n.$$

On vérifie que

$$U_0 = 2 = 2^0 + 3^0 \quad \text{et} \quad U_1 = 5 = 2^1 + 3^1.$$

Donc H_0 et H_1 sont vrai.

Fixons $n \geq 2$. Supposons que H_{n-1} et H_{n-2} sont vrai. Montrons que H_n est vrai. On a

$$\begin{aligned} U_n &= 5U_{n-1} - 6U_{n-2} \\ &= 5(2^{n-1} + 3^{n-1}) - 6(2^{n-2} + 3^{n-2}) && \text{d'après } H_{n-1} \text{ et } H_{n-2} \\ &= 10 \times 2^{n-2} + 15 \times 3^{n-2} - 6(2^{n-2} + 3^{n-2}) \\ &= 2^n + 3^n. \end{aligned}$$

Exercice 3.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |U_n - l| \leq \varepsilon$$

ou

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \implies |U_n - l| \leq \varepsilon).$$