Université Claude Bernard Lyon 1
Semestre d'automne 2019-20

UE Fondamentaux des maths I
Groupe Math

Examen 3 – Durée 50 min – le jeudi 12 décembre 2019

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
Les **réponses mal justifiées** ne permettront pas d'obtenir tous les points.
BIEN INDIQUER SON NUMÉRO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE
L'énoncé comporte 4 exercices.

Exercice 1. PGCD et Bezout

1. Calculer $\operatorname{pgcd}(107, 281)$.
2. Soit a et b deux entiers non nuls. Montrer qu'il existe u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $au + bv = \operatorname{pgcd}(a, b)$.
3. Trouver u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $107u + 281v = \operatorname{pgcd}(107, 281)$.

Exercice 2. Equation quadratique et modulo

1. Factoriser (c'est-à-dire écrire comme produit de deux polynômes de degré 1) le polynôme suivant à coefficients réels
$$x^2 + 2x - 3.$$
2. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$, si $ab \equiv 0$ $[17]$ alors $a \equiv 0$ $[17]$ ou $b \equiv 0$ $[17]$.
3. Montrer par un exemple que l'implication
$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \qquad \Big(ab \equiv 0\ [15] \Rightarrow (a \equiv 0\ [15]) \text{ ou } (b \equiv 0\ [15])\Big)$$
est fausse.
4. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$,
$$x^2 + 2x - 3 \equiv 0 \qquad [17]$$
si et seulement si $x \equiv 1$ $[17]$ ou $x \equiv 14$ $[17]$.
5. Justifier l'existence de $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x \equiv 1$ $[3]$ et $x \equiv 2$ $[5]$, par un théorème du cours dont on rappelera les hypothèses.
6. Trouver un entier $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x \equiv 1$ $[3]$ et $x \equiv 2$ $[5]$.
7. Trouver $x \in \mathbb{Z}$ tel que
$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \equiv 0 \qquad [15] \\ x \not\equiv 1 \qquad [15] \\ x \not\equiv -3 \qquad [15]. \end{cases}$$

Exercice 3. Point fixe.
Soit $f : [0; 1] \longrightarrow [0; 1]$ une fonction.

1. En considérant la fonction auxiliaire $g(x) = f(x) - x$, montrer que si f est continue alors il existe $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = c$.
2. Montrer par un dessin que cela peut être faux si f n'est pas supposée continue.

Exercice 4. Question préparée.
Soit $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que $\sup\{f(x) : x \in [0; 1]\}$ est fini et qu'il existe $c \in [0; 1]$ tel que
$$f(c) = \sup\{f(x) : x \in [0; 1]\}.$$

Liste de Questions de cours ou préparées pour le DS3.

1. Enoncer la caractérisation de f continue en x_0 qui commence par $\forall \varepsilon > 0$.
2. Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que $\sup\{f(x) : x \in [0;1]\}$ est fini et qu'il existe $c \in [0;1]$ tel que
$$f(c) = \sup\{f(x) : x \in [0;1]\}.$$
Il s'agit de redémontrer un résultat du cours.
3. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
4. Enoncer et démontrer le théorème de Gauss pour les entiers.
5. Soit n et m des entiers naturels non nuls tels que $\text{pgcd}(n, m) = 1$. Soit a et b deux entiers relatifs. Montrer, sans utilisé le théorème chinois, qu'il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que
$$\begin{cases} x \equiv a & [n] \\ x \equiv b & [m] \end{cases}$$
6. Soit n et m des entiers naturels non nuls tels que $\text{pgcd}(n, m) = 1$. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que
$$\begin{cases} x \equiv 0 & [n] \\ x \equiv 0 & [m] \end{cases}$$

Exercice 1.

1. On applique l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{rll} \mathrm{pgcd}(107,281) = & \mathrm{pgcd}(281-2*107,107) & = \mathrm{pgcd}(67,107) \\ = & \mathrm{pgcd}(107-67,67) & = \mathrm{pgcd}(40,67) \\ = & \mathrm{pgcd}(67-40,40) & = \mathrm{pgcd}(27,40) \\ = & \mathrm{pgcd}(40-27,27) & = \mathrm{pgcd}(13,27) \\ = & \mathrm{pgcd}(27-2*13,13) & = \mathrm{pgcd}(1,13) \\ = & 1 & \end{array}$$

2. Posons $d = \mathrm{pgcd}(a,b)$, $a' = a/d$ et $b' = b/d$. Alors $\mathrm{pgcd}(a',b') = 1$. D'après le théorème de Bezout, il existe u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $a'u + b'v = 1$. En multipliant par d, on obtient la relation cherchée.
3. Pour trouver u et v pour $(107,281)$, on applique l'alpgorithme d'Euclide étendu. On part ainsi de $1 = 13 - 12*1$ et on remonte :

$$\begin{array}{rlcl} 1 = & 13-12*1 & = & -12(27-2*13)+13 = \\ = & 27*(-12)+13*25 & = & (40-27)*25-12*27 \\ = & 40*25-27*37 & = & 40*25-37*(67-40) \\ = & 40*62-67*37 & = & (107-67)*62-67*37 \\ = & 107*62-67*99 & = & 107*62-(281-2*107)*99 \\ = & 281*(-99)+107*305 & & \end{array}$$

Exercice 2.

1. Le disciminant vaut $2^2 + 4*3 = 16$. Donc les solutions sont $(\pm 4 - 2)/2$ donc $\{1; -3\}$. Ainsi
$$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3).$$
2. $ab \equiv 0$ $[17]$ signifie que 17 divise ab. Comme 17 est premier, le théorème de Gauss implique 17 divise a ou b. Donc $a \equiv 0$ $[17]$ ou $b \equiv 0$ $[17]$.
3. Comme nous l'avons vu à la question précédente, le point clé est que 15 n'est pas premier : $15 = 3*5$. Il suffit de prendre $a = 3$ et $b = 5$.
4. On a $x^2 + 2x - 3 \equiv 0$ $[17]$ si et seulement si $(x-1)(x+3) \equiv 0$ $[17]$. D'après la question 2, cela équivaut à $x - 1 \equiv 0$ $[17]$ ou $x + 3 \equiv 0$ $[17]$, donc à $x \equiv 1$ $[17]$ ou $x \equiv -3 \equiv 14$ $[17]$.
5. Comme 3 et 5 sont premiers enntre eux, le théorème Chinois assure l'existence de x.
6. On essaie successivemet les solutions de $x \equiv 2$ $[5]$: $2, 7, 12, 17 \ldots$. Ici, ça va vite, $x = 7$ convient.
7. En fait $x = 7$ convient :
$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \equiv (x-1)(x+3) \equiv 6*10 \equiv 0 \quad [15] \\ 7 \not\equiv 1 \quad [15] \\ 7 \not\equiv -3 \quad [15]. \end{cases}$$

Exercice 3.

1. On a $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Or g est contiue comme somme de 2 fonctions continues. Alors le théorème de valeurs itermédiaires assure l'existence de c tel que $0 \leq c \leq 1$ et $g(c) = 0$ c'est-à-dire $f(c) = c$.
2. Il suffit de prendre $f(x) = 1$ si $x < 1$ et $f(1) = 0$.

Exercice 4.

Que le sup soit fini ou non, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[0;1]$ telle que $f(x_n)$ tend vers de sup. D'après le théorème de Bolzano-Weirstrass, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $[0;1]$ disons vers $l \in [0;1]$.
La continuité de f assure que $f(\lim_n x_{\varphi(n)}) = \lim_n f(x_{\varphi(n)})$. Donc $f(l) = \sup$. On conclut que le sup est fini et qu'il est atteint.