

Examen Partiel – Durée 90 min – le jeudi 21 novembre 2019

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.

La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

Les **réponses mal justifiées** ne permettront pas d'obtenir tous les points.

BIEN INDIQUER SON NUMÉRO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE

L'énoncé comporte trois exercices.

Exercice 1. Nombres complexes.

1. Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $z^4 = 1$.
2. Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $z^4 = 4$.
3. Calculer les parties réelles et imaginaires de

$$z = \frac{3 + 6i}{3 - 4i}.$$

4. Calculer le module et l'argument (dans $[0; 2\pi[$) de $z = -1 + i\sqrt{3}$.
5. Soit $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On suppose que $b > 0$. Montrer que

$$\left| \frac{z - i}{z + i} \right|^2 < 1$$

Exercice 2. Fonctions usuelles.

On rappelle que $e = 2,718\cdots > 2$. On pose

$$f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{4-2x} + \frac{\ln(x)}{2}.$$

1. Justifier que $\ln(2) < 1$.
2. Montrer que $f(1) > 2$ et $f(2) < 2$.
3. Calculer la fonction dérivée f' .
4. Montrer que sur l'intervalle $[1; 2]$, on a $-e^{4-2x} \leq -1$ et $\frac{1}{x} \leq 1$.
5. On déduit que f est strictement décroissante sur $[1; 2]$.

On admettra par la suite que f est strictement décroissante et qu'il existe un unique $l \in [1; 2]$ tel que $f(l) = 2$.

Exercice 3. Une suite récurrente.

On pose

$$\varphi :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2 - \frac{\ln(x)}{2}$$

et on définit par récurrence la suite

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \varphi(u_n). \end{cases}$$

1. Montrer que φ est décroissante.
2. Montrer que $\varphi([1; 2])$ est inclus dans $[1; 2]$.
On note $\tilde{\varphi}$ la restriction de φ à l'intervalle $[1; 2]$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une suite extraite convergente.
5. Montrer, si possible sans calculer de dérivée, que $\bar{\varphi} \circ \bar{\varphi}$ est croissante.
6. Montrer que la suite extraite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
On admettra que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
7. Montrer que les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.
Notons l_0 et l_1 les limites respectives.
8. En admettant que $(\bar{\varphi} \circ \bar{\varphi})(l_0) = l_0$ et $(\bar{\varphi} \circ \bar{\varphi})(l_1) = l_1$, montrer que $l_0 = l_1 = l$, où l est le réel de l'exercice 2.
9. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l .

CORRECTION

Exercice 1.

1. On a vu en cours que l'ensemble des solutions est $\{1, \omega, \omega^2, \omega^3\}$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{4}}$. Or $\omega = i$. Donc l'ensemble des solutions est $\{1, i, -1, -i\}$.
2. On remarque $z = \sqrt{2}$ est solution. On effectue le changement d'inconnue $Z = \frac{z}{\sqrt{2}}$. Alors

$$z^4 = 4 \iff (Z\sqrt{2})^4 = 4 \iff Z^4 = 1.$$

Ainsi d'après la question 1, l'ensemble des solutions est $\{\sqrt{2}, i\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\}$.

3. On multiplie le dénominateur par l'expression conjuguée :

$$z = \frac{3+6i}{3-4i} = \frac{(3+6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{-15+30i}{25} = \frac{-3+6i}{5}.$$

4. Pour $z = -1 + i\sqrt{3}$. Si $z = \rho e^{i\varphi}$ avec $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi \in [0; 2\pi[$, on a

$$\rho = |z| = \sqrt{1+3} = 2$$

et

$$\tan(\varphi) = -\sqrt{3}.$$

Or $-\sqrt{3} = \tan(-\frac{\pi}{3})$. Donc, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Par ailleurs, des signes des parties réelle et imaginaire de z , on déduit que $\varphi \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$. On conclut que

$$\varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

5. On a

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 < 1 &\iff \frac{|a+i(b-1)|^2}{|a+i(b+1)|^2} < 1 \\ &\iff a^2 + (b-1)^2 < a^2 + (b+1)^2 \\ &\iff -2b < 2b \\ &\iff b > 0. \end{aligned}$$

De la deuxième ligne à la première, on a utilisé $z \neq -i$.

Exercice 2.

1. On a $e > 2$. Comme \ln est croissante, on obtient $\ln(e) = 1 > \ln(2)$.
2. On a $f(1) = e^2 \geq 2^2 > 2$. Et $f(2) = e^0 + \frac{\ln 2}{2} = 1 + \frac{\ln 2}{2} < 1,5 < 2$.
3. On a

$$f'(x) = -2e^{4-2x} + \frac{1}{2x}.$$

4. La fonction $x \mapsto -e^{4-2x}$ est croissante comme composée de la fonction décroissante $-\exp$ et de la fonction affine décroissante $4 - 2x$. Donc sur $[1; 2]$ elle est inférieure à sa valeur en 2 :

$$-e^{4-2x} \leq -e^0 = -1 \quad \forall x \in [1; 2].$$

La fonction $x \mapsto 1/x$ est décroissante sur $[1; 2]$. Donc sur $[1; 2]$ elle est inférieure à sa valeur en 1 :

$$\frac{1}{x} \leq 1 \quad \forall x \in [1; 2].$$

5. On multiplie la première égalité de la question précédente par 2, la deuxième par 1/2 et on les additionne. On obtient :

$$-2e^{4-2x} + \frac{1}{2x} \leq -2\frac{1}{2} \leq -1, 5 < 0 \quad \forall x \in [1; 2].$$

Ainsi f' est strictement négative sur l'intervalle donc f est strictement décroissante.

Exercice 3.

1. Comme \ln est croissante, $-\ln$ puis φ sont décroissantes.
2. On a $\varphi(1) = 2$ et $2 > \varphi(2) = 2 - \frac{\ln(2)}{2} > 1$. Comme \ln est croissante φ est décroissante. En particulier, pour tout $x \in [1; 2]$, on a $1 \leq \varphi(2) \leq \varphi(x) \leq \varphi(1) < 2$.
3. Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in [1; 2].$$

Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et l'assertion est triviale. Supposons que $u_n \in [1; 2]$. Alors par la question précédente

$$u_{n+1} = \varphi(u_n) \in [1; 2].$$

4. D'après la question précédente, u_n est bornée. Mais alors, le théorème de Bolzano-Weierstrass assure l'existence d'une suite extraite convergente.
5. On a déjà vu que φ et donc $\bar{\varphi}$ sont décroissantes. Mais alors, $\bar{\varphi} \circ \bar{\varphi}$ est croissante. En effet, si $x \leq y$. On a $\bar{\varphi}(x) \geq \bar{\varphi}(y)$, et donc $\bar{\varphi}(x) \leq \bar{\varphi}(y)$.
6. On a $u_{2n} = (\bar{\varphi} \circ \bar{\varphi})(u_{2(n-1)})$. Montrons par récurrence que, pour tout n , $u_{2(n+1)} \geq u_{2n}$. Comme $u_2 \in [1; 2]$ et $u_0 = 1$, on a bien $u_2 \geq u_0$. Supposons que $u_{2(n+1)} \geq u_{2n}$. En appliquant, la fonction croissante $\bar{\varphi} \circ \bar{\varphi}$ à cette égalité on obtient

$$u_{2(n+2)} = (\bar{\varphi} \circ \bar{\varphi})(u_{2(n+1)}) \geq \bar{\varphi} \circ \bar{\varphi}(u_{2n}) = u_{2(n+1)}.$$

Ainsi u_{2n} est croissante.

7. Les suites $u_{2(n+1)}$ et u_{2n} sont monotones par la question précédente et bornées par la question 2. Elles sont donc convergentes par théorème du cours.
8. On a

$$(\bar{\varphi} \circ \varphi)(x) = 2 - \frac{1}{2} \ln\left(2 - \frac{\ln(x)}{2}\right).$$

Donc $(\bar{\varphi} \circ \varphi)(x) = x$ si et seulement si

$$2 - \frac{1}{2} \ln\left(2 - \frac{\ln(x)}{2}\right) = x,$$

si et seulement si

$$4 - 2x = \ln\left(2 - \frac{\ln(x)}{2}\right),$$

si et seulement si

$$e^{4-2x} = 2 - \frac{\ln(x)}{2},$$

si et seulement si

$$e^{4-2x} + \frac{\ln(x)}{2} = 2.$$

On reconnaît l'équation $f(x) = 2$. On a vu que cette équation a une unique solution l dans $[1; 2]$. Donc $l_0 = l = l_1$.

9. C'est une application directe du théorème du cours : les deux suites extraites complémentaires tendent vers la même limite l donc u_n tend vers l .

Un exercice auquel vous avez échappé.

Exercice 1. Soit

$$f : \mathbb{C} - \{-i\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$$

1. Montrer que i est le seul antécédent de 0.
2. Soit $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On suppose que $b > 0$. Montrer que

$$|f(z)|^2 < 1$$

3. Soit $z \neq i$ tel que $|f(z)| < 1$. Montrer que $\text{Im}(z) > 0$.
4. Posons $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. On définit l'application

$$g : \mathbb{H} \longrightarrow D \\ z \longmapsto f(z)$$

Expliquer pourquoi g est bien définie.

5. Montrer que g est une bijection et calculer l'application réciproque.

CORRECTION

Exercice 1.

1. Il s'agit de voir que i est la seule solution de l'équation $f(z) = 0$. Mais, pour $z \neq -i$, $f(z) = 0$ si et seulement si $z - i = 0$.
2. On a

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 < 1 &\iff \frac{|a+i(b-1)|^2}{|a+i(b+1)|^2} < 1 \\ &\iff a^2 + (b-1)^2 < a^2 + (b+1)^2 \\ &\iff -2b < 2b \\ &\iff b > 0. \end{aligned}$$

De la deuxième ligne à la première, on a utilisé $z \neq -i$.

3. On a raisonné par équivalences à la question précédente donc la réciproque est vrai.
4. Tout d'abord \mathbb{H} ne contient pas $-i$, donc $f(z) \in \mathbb{C}$ est bien défini. De plus, d'après la question 2 si $z \in \mathbb{H}$ alors $f(z) \in D$.
5. Considérons l'équation

$$z' = \frac{z-i}{z+i}.$$

Ceci est équivalent pour $z \neq -i$, à

$$z'(z+i) = z-i,$$

cad à

$$z(z'-1) = -iz' - i$$

ou encore à

$$z = \frac{i(z'+1)}{1-z'}.$$

Ceci prouve l'injectivité car on a au plus une solution. Par ailleurs, pour tout $z' \in D$, la dernière équation définit bien un élément de \mathbb{C} tel que $f(z) = z'$. Alors la question 3 montre que $z \in \mathbb{H}$. D'où la surjectivité.

La réciproque est

$$g : D \longrightarrow \mathbb{H} \\ z \longmapsto i \frac{z'+1}{1-z'}.$$