Correction succincte de l'examen partiel

Exercice 1

Question 1.1 On note $w = \dfrac{2+i}{3-4i}$. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de w.

Réponse On multiplie en haut et en bas par le complexe conjugué du dénominateur $3+4i$ ce qui fait écrire :

$$w = \frac{2+i}{3-4i} = \frac{(2+i)(3+4i)}{|3-4i|^2} = \frac{(6-4)+(3+8)i}{3^2+4^2} = \frac{2}{25} + \frac{11}{25}i.$$

On lit alors sur cette expression la partie réelle de w, qui est $\dfrac{2}{25}$ et sa partie imaginaire, qui est $\dfrac{11}{25}$.

Question 1.2.a Énoncer la formule du cours de la forme

$$\sin x = \frac{e^{ix} \pm e^{-ix}}{K}$$

valable pour tout x réel.

Réponse On attendait la réponse $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

Question 1.2.b À partir de cette formule, déterminer deux constantes c et d pour lesquelles :

$$\sin^3 x = c \sin(3x) + d \sin x$$

Réponse On met au cube l'identité écrite au-dessus et on développe le cube de différence du numérateur. Ceci mène à écrire :

$$\sin^3 x = \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{8i^3}$$

qu'on regroupe en :

$$\sin^3 x = \frac{1}{4} \frac{-\left(e^{3ix} - e^{-3ix}\right) + 3\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)}{2i} = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin x$$

pour tout x réel.

Question 1.3.a Rappeler quelles sont les solutions de l'équation $Z^4 = 1$, d'inconnue Z complexe.

Réponse Ce sont 1, i, -1 et $-i$ sans qu'il soit besoin d'expliquer davantage.

Question 1.3.b Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante, d'inconnue z :

$$z^4 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

Réponse On commence par mettre sous forme exponentielle le terme de droite de l'équation :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Une fois ce calcul effectué, on remarque que $e^{i\frac{\pi}{24}}$ est une solution plus ou moins évidente de l'équation, qui peut donc se réécrire sous la forme :

$$z^4 = \left(e^{i\frac{\pi}{24}}\right)^4$$

ou encore :

$$\left(\frac{z}{(e^{i\frac{\pi}{24}})}\right)^4 = 1$$

En utilisant la résolution rappelée au a, on conclut que les solutions sont

$$e^{i\frac{\pi}{24}},\ ie^{i\frac{\pi}{24}},\ -e^{i\frac{\pi}{24}} \text{ et } -ie^{i\frac{\pi}{24}}$$

(on peut bien sûr les exprimer de tout un tas d'autres façons, tout aussi acceptables par un correcteur).

Exercice 2

Soit f la fonction de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}.$$

Question 1 Dresser le tableau de variations de f en y faisant figurer les sens de variations et les limites aux bornes de l'intervalle de définition.

Réponse Le plus confortable est de poser dans un premier temps $t = x - 1$ en observant que comme $\frac{dx}{dt} = 1$, on a l'identité $\frac{d}{dx} = \frac{d}{dt}$ et qu'on peut donc calculer les dérivées indifféremment par rapport à x ou à t (un changement de calendrier ne modifie ni les vitesses, ni les accélérations !). Cette notation sera également utilisée dans les questions suivantes.

Une fois qu'on a fait ça, on écrit $f(t) = \frac{(t+1)^2}{t} = t + 2 + \frac{1}{t}$ et on se lance dans les questions proprement dites.

La dérivée de f est $f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2}$. Elle est donc à valeurs strictement positives pour $t \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ ou encore pour $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$, et elle est à valeurs strictement positives pour $t \in]-1, 0[\cup]0, 1[$ ou encore pour $x \in]0, 1[\cup]1, 2[$.

La fonction (de la variable x) est donc strictement croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]2, +\infty[$, et strictement décroissante sur chacun des intervalles $]0, 1[$ et $]1, 2[$.

On complète le tableau en précisant $f(0) = 0$ et $f(2) = 4$.

Enfin les limites aux bornes sont évidentes sur l'expression en fonction de t, dans laquelle on ne rencontre aucune forme indéterminée : ce sont $-\infty$ en $-\infty$, $-\infty$ pour t tendant vers 0^- (autrement dit pour x tendant vers 1^-), $+\infty$ pour t tendant vers 0^+ (autrement dit pour x tendant vers 1^+) et $+\infty$ en $+\infty$.

Question 2 Pour x élément de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, calculer l'expression $f(x) - (x + 1)$, puis déduire de ce calcul que le graphe de f et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ sont asymptotes. Préciser la position du graphe de f par rapport à $\mathcal{D}$, en fonction de x.

Réponse L'expression proposée est plus confortable en variable t, dans laquelle $x + 1 = (t + 1) + 1 = t + 2$. Il reste alors $f(x) - (x + 1) = \frac{1}{t}$. Cette expression tend évidemment vers zéro en l'infini, ce qui peut s'exprimer en langage géométrique en disant que la courbe de la fonction et la droite d'équation $y = x + 1$ sont asymptotes. La position de la courbe par rapport à la droite se lit sur le signe de cette différence : c'est la courbe qui est au-dessus quand $t > 0$ (autrement dit quand $x > 1$), c'est la droite quand $t < 0$ (autrement dit quand $x < 1$).

Question 3 Discuter la concavité ou la convexité du graphe de f sur des intervalles appropriés.

Réponse On calcule la dérivée seconde $\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2}{dt^2} = \frac{2}{t^3}$. Celle-ci est du signe de t, et donc la fonction est strictement concave sur l'intervalle $t \in]-\infty, 0[$ autrement dit $x \in]-\infty, 1[$ et strictement convexe sur l'intervalle $t \in]0, +\infty[$ autrement dit $x \in]1, +\infty[$.

Exercice 3

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}.$$

Question 1 On note f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 12}.$$

Montrer que cette fonction f est croissante.

Réponse La fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0, +\infty[$ donc aussi la fonction $x \mapsto x^2 + 12$. C'est aussi le cas de la fonction racine carrée. La fonction f est donc croissante par composition de fonctions croissantes.

Question 2 Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Réponse La suite est obtenue par itération d'une fonction croissante, le cours précise expressément que sous cette hypothèse la suite est monotone. Pour déterminer son sens de variation, il suffit alors de calculer $u_1 = \frac{1}{2}\sqrt{12} = \sqrt{3}$ et de constater que $u_0 < u_1$. La suite n'est donc pas décroissante. Comme on la sait monotone, c'est qu'elle croît.

Question 3 En utilisant la question précédente, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, puis déterminer sa limite.

Réponse On aura gagné si on parvient à montrer que la suite est majorée. Pour ce faire, on va montrer par récurrence l'énoncé (H_n) : " $u_n \leq 2$ ".

On utilisera la notation f pour la même fonction qu'à la première question. On observe que $f(2) = 2$.

* (H_0) est clair, car $u_0 = 0 \leq 2$.

* Soit n un entier naturel et supposons (H_n) vraie. Par application de la fonction croissante f à l'inégalité (H_n), on obtient $f(u_n) \leq f(2) = 2$. Autrement dit $u_{n+1} \leq 2$: c'est précisément (H_{n+1}).

Ceci clôt la récurrence.

La suite est donc majorée par le réel 2. Croissante et majorée, elle ne peut que converger.

Reste à calculer sa limite, après l'avoir notée l. Pour ce faire on écrit la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}$ dans laquelle on fait tendre n vers l'infini. À gauche, comme $n + 1$ tend aussi vers l'infini, u_{n+1} tend vers l. À droite, u_n^2 tend vers l^2, puis $u_n^2 + 12$ vers $l^2 + 12$ et enfin l'expression de droite vers $\frac{1}{2}\sqrt{l^2 + 12}$. On en déduit la relation :

$$2l = \sqrt{l^2 + 12}$$

.

Mettons la au carré, on obtient : $4l^2 = l^2 + 12$ puis $3l^2 = 12$ puis $l^2 = 4$, puis $l = \pm 2$. Comme la suite étudiée est à termes positifs, sa limite est nécessairement positive, donc $l = 2$.

Question 4 Pour chaque entier naturel n, on note $v_n = u_n^2 - 4$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, et préciser sa raison.

Réponse Pour n entier naturel, on examine

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 4 = \frac{1}{4}(u_n^2 + 12) - 4 = \frac{1}{4}u_n^2 - 1 = \frac{1}{4}(u_n^2 - 4) = \frac{1}{4}v_n.$$

De ce calcul on conclut que v_n est géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

Question 5 En déduire une nouvelle démonstration de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et déterminer une nouvelle fois sa limite.

Réponse Puisque géométrique de raison strictement plus petite que 1 en valeur absolue, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite 0. On en déduit en ajoutant 4 que u_n^2 tend vers 4 quand n tend vers $+\infty$. De plus chaque terme u_n de la suite est positif, donc $u_n = |u_n| = \sqrt{u_n^2}$ tend vers $\sqrt{4} = 2$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 4

Soit a et b deux réels. On définit par récurrence une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = a, \qquad u_1 = b \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\, 2u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$v_n = 12u_n - 6u_{n+1} \quad \text{ et } w_n = -3u_n + 6u_{n+1}.$$

Question 1 Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. En déduire, pour tout n entier naturel, une expression de v_n en fonction de n, de a et de b.

Réponse Pour n entier naturel, on calcule

$$v_{n+1} - \frac{1}{2}v_n = (12u_{n+1} - 6u_{n+2}) - (6u_n - 3u_{n+1}) = 15u_{n+1} - 6u_{n+2} - 6u_n = -3(2u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n) = 0.$$

Ce qui conclut.

On calcule ensuite $v_0 = 12u_0 - 6u_1 = 12a - 6b$. Depuis ce premier terme et sa raison, on sait alors exprimer pour tout n entier naturel :

$$v_n = \frac{12a - 6b}{2^n}.$$

Question 2 Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2. En déduire, pour tout n entier naturel, une expression de w_n en fonction de n, de a et de b.

Réponse Pour n entier naturel, on calcule

$$w_{n+1} - 2w_n = (-3u_{n+1} + 6u_{n+2}) - (-6u_n + 12u_{n+1}) = -15u_{n+1} + 6u_{n+2} + 6u_n = 3(2u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n) = 0.$$

Ce qui conclut.

On calcule ensuite $w_0 = -3u_0 + 6u_1 = -3a + 6$. Depuis ce premier terme et sa raison, on sait alors exprimer pour tout n entier naturel :

$$w_n = 2^n(-3a + 6b).$$

Question 3 Pour n entier naturel, en déduire une expression de u_n en fonction de n, de a et de b. On pourra s'intéresser au réel $v_n + w_n$.

Réponse Pour n entier naturel, on remarque que $v_n + w_n = 9u_n$. On en déduit aussitôt l'expression suivante, qu'il ne serait pas opportun de regrouper plus "astucieusement", elle est très bien comme ça :

$$u_n = \frac{1}{9}\left[\frac{12a - 6b}{2^n} + 2^n(-3a + 6b)\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{4a - 2b}{2^n} + 2^n(-a + 2b)\right].$$

Question 4 Déterminer pour quelles valeurs du couple (a, b) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et, lorsqu'elle l'est, préciser sa limite.

Réponse Soit (a, b) un couple de réels. Dans l'expression de u_n trouvée à la question précédente, le terme $\dfrac{4a-2b}{2^n}$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Le comportement de l'autre terme (à savoir $2^n(-a+2b)$) mérite, lui, discussion :

* si $-a+2b > 0$ il tend vers $+\infty$;

* si $-a+2b < 0$ il tend vers $-\infty$;

* si $-a+2b = 0$ il est identiquement nul et tend donc vers 0.

On en conclut que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $a = 2b$ et que, dans ce cas, sa limite est nulle.