Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2020-2021

Fondamentaux des mathématiques I — 13 janvier 2021. Durée : 1 heure

---

TITRE À PRÉCISER PAR QUELQU'UN QUI COMPREND LES MODALITÉS D'EXAMEN

Les exercices sont indépendants les uns des autres

Exercice 1. Ici, i désigne le numbre complexe tel que $i^2 = -1$.

1) Déterminer les parties réelles et imaginaires de

$$\delta = e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante, d'inconnue z :

$$-z^2 + 2z + i - 1 = 0.$$

Exercice 2. Soit $f\,:\,\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2 + \frac{3}{16}$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
2. Etudier le signe de $f(x) - x$ suivant la valeur de $x \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer $f([\frac{1}{4}; \frac{3}{4}])$.
4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. Montrer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 3. Soit $f\,:\,E \longrightarrow F$ une application. Soit A une partie de E et B une partie de F.

1. Soit $x \in f^{-1}(B) \cap A$. Montrer que $f(x) \in B$ et $f(x) \in f(A)$.
2. En déduire que $f(f^{-1}(B) \cap A) \subset B \cap f(A)$.
3. Montrer que réciproquement $B \cap f(A) \subset f(f^{-1}(B) \cap A)$.

On vient de montrer que $f(f^{-1}(B) \cap A) = B \cap f(A)$. Cette formule est appelée *formule de projection.*