Université Claude Bernard Lyon 1 — UE Fondamentaux des maths I
Semestre d'automne 2021-2022 — Groupe Math

Examen Partiel – Durée 90 min – le jeudi 18 novembre 2021

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
Les **réponses mal justifiées** ne permettront pas d'obtenir tous les points.
BIEN INDIQUER SON NUMÉRO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE
L'énoncé comporte trois exercices.

Exercice 1. Fonctions usuelles.
On note

$$f : \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x}\ln(x)+\ln(2). \end{array}$$

1. Calculer la dérivée de f sur $]0,+\infty[$, et en déduire que pour tout $x>0$ le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $\ln(x)+2$.
2. Calculer la limite éventuelle (finie ou infinie) de $f(x)$ pour x tendant vers $+\infty$.
3. Calculer la limite éventuelle (finie ou infinie) de $f(x)$ pour x tendant vers 0.
4. Tracer le tableau de variations de f.
5. Vérifier que $a=2$ et $a=4$ satisfont à l'équation
$$f(2^{-a})=0.$$
6. On rappelle que $0,5<\ln(2)<1$. Montrer que
$$2^{-4}<e^{-2}<2^{-2}.$$
En déduire, à l'aide des deux questions précédentes, que $f(e^{-2})<0$.
7. Montrer que la restriction de f à $]0,e^{-2}]$ est injective.
8. Montrer que f s'annule exactement une fois sur $]0,e^{-2}]$.
On admettra que, de même f s'annule exactement une fois sur $]e^{-2};+\infty[$.
9. Résoudre l'équation
$$x^{\sqrt{x}}=\frac{1}{2},$$
d'inconnue $x\in]0;+\infty[$.

Exercice 2. Une suite arithmético-géométrique
On définit par récurrence la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+3. \end{cases}$$

1. Résoudre l'équation $\alpha=\frac{1}{4}\alpha+3$, d'inconnue α.
2. Posons $v_n=u_n-\alpha_0$, où α_0 est la solution de l'équation de la première question.
Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
3. Déterminer v_n en fonction de n.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 3. Nombres complexes et pentagone régulier.

1. En exprimant $\cos(x)$ à l'aide de $e^{\pm ix}$, montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 2\cos^2(x) = \cos(2x) + 1.$$
2. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Justifier que $\omega^5 = 1$.
3. Montrer les identités
$$\bar{\omega} = \frac{1}{\omega} = \omega^4 \quad \text{et} \quad \bar{\omega}^2 = \frac{1}{\omega^2} = \omega^3.$$
4. Exprimer les parties réelle et imaginaire de ω à l'aide des fonctions trigonométriques sin et cos.
5. Démontrer que
$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0. \tag{0.1}$$
6. En prenant la partie réelle dans l'équation (0.1), montrer que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est solution de l'équation
$$4x^2 + 2x - 1 = 0.$$
On pourra aussi utiliser les questions 1 et 3.
7. En déduire une expression de $\cos(\frac{2\pi}{5})$ faisant intervenir $\sqrt{5}$.
8. Soit I le point d'affixe $\frac{i}{2}$ et B celui d'affixe -1.
Calculer la distance BI.
On rappelle que la distance AB entre deux points d'affixes z_A et z_B est $AB = |z_B - z_A|$.
9. Soit A_2 le point d'affixe ω^2. Montrer que $BA_2 = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$.
On pourra utiliser la question 1.
10. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre I et de rayon $\frac{1}{2}$. Soit J le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et du segment $[BI]$.
Déterminer la distance BJ, à l'aide de la figure 1.
11. En déduire que
$$BJ = BA_2.$$
12. A l'aide de la question précédente, placer A_2 sur la figure 1.
Répondez à cette question directement sur la figure et rendez-la !

NOM : Prénom :
Numéro : Groupe de TD :

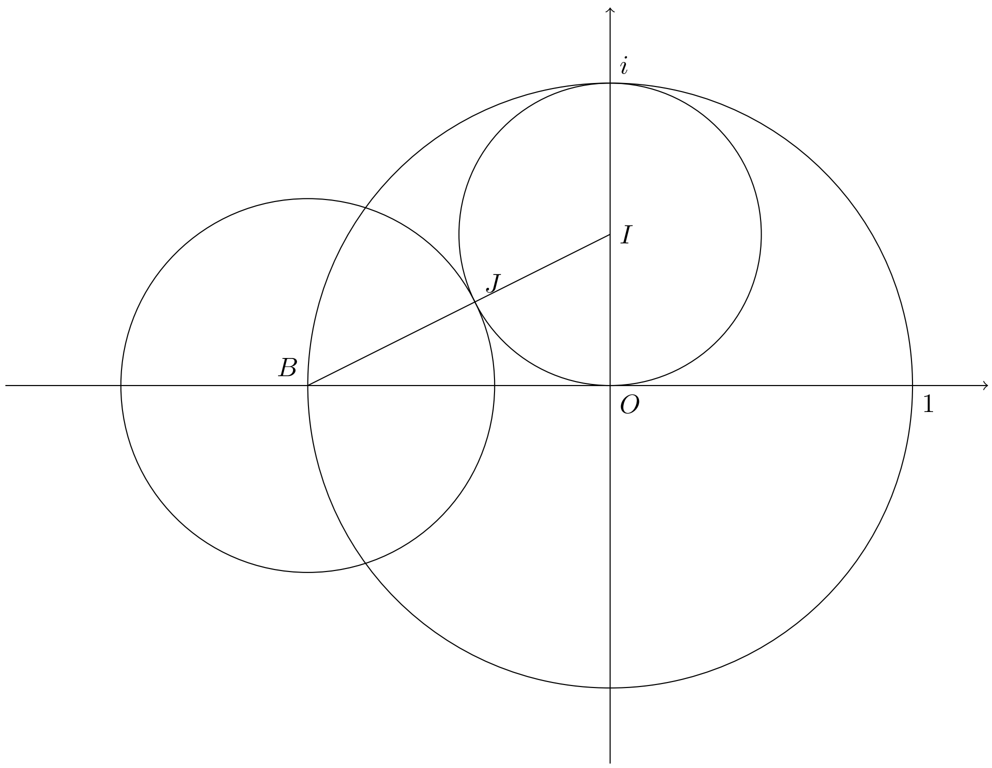

FIGURE 1 – Tracé du pentagone régulier

CORRIGÉ

Exercice 1.

1. On a
$$f'(x) = (\sqrt{x})' \ln(x) + \sqrt{x}(\ln(x))' = \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(x)+2}{2\sqrt{x}}.$$
Le dénominateur de $f'(x)$ est toujours positif. Le signe de $f'(x)$ est donc celui du numérateur c'est-à-dire celui de $\ln(x)+2$.
2. Comme $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3. En 0, on a une forme indéterminée. Les croissances comparées du cours disent que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln(x) = 0$. Donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln(2)$.
4. D'après le première question $f'(x) \geq 0$ si seulement si $\ln(x) \geq -2$ ssi (car ln et exp sont strictement croissantes) $x \geq e^{-2}$. Donc f est décroissante sur $]0; e^{-2}]$ et croissante sur $[e^{-2}; +\infty[$.
5. On a $f(2^{-2}) = \sqrt{\frac{1}{4}} \ln(2^{-2}) - \ln(2) = \frac{1}{2} \times (-2)\ln(2) + \ln(2) = 0$.
De même, $f(2^{-4}) = \sqrt{\frac{1}{2^4}} \ln(2^{-4}) - \ln(2) = \frac{1}{4} \times (-4)\ln(2) + \ln(2) = 0$.
6. On a $\frac{1}{2} < \ln 2$. Donc, en multipliant par -4, $-2 > -4\ln 2$. Comme la fonction exp est croissante, on en déduit que $e^{-2} > e^{-4\ln 2} = 2^{-4}$.
De même $\ln 2 < 1$. Donc, en multipliant par -2, $-2\ln 2 > -2$. Comme la fonction exp est croissante, on en déduit que $e^{-2\ln 2} = 2^{-2} > e^{-2}$.
Finalement, $2^{-4} < e^{-2} < 2^{-2}$, comme demandé.

   La fonction f étant strictement croissante sur $[e^{-2}; +\infty[$, en l'appliquant à $e^{-2} < 2^{-2}$, on obtient $f(e^{-2}) < f(2^{-2}) = 0$.
7. La restriction de f à l'intervalle $]0; e^{-2}[$ est strictement croissante, donc injective.
8. Par injectivité, elle s'annule au plus une fois. Or $2^{-4} \in]0; e^{-2}[$ et $f(2^{-4}) = 0$. Donc f s'annule une fois sur $]0; e^{-2}[$.
9. Comme ln est bijective, on a $x^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$ si et seulement si $\ln(x^{\sqrt{x}}) = \ln(\frac{1}{2})$. Comme $\ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2)$ et $\ln(x^{\sqrt{x}}) = \sqrt{x}\ln(x)$, cela est équivalent à $f(x) = 0$.
D'après la question précédente, cette équation a exactement une solution sur $]0; e^{-2}[$ qui vaut $2^{-4} = \frac{1}{16}$. De même, elle a exactement une solution sur $]e^{-2}; +\infty[$ qui vaut $2^{-2} = \frac{1}{4}$.
Finalement, l'ensemble des solutions est
$$\{\frac{1}{4}; \frac{1}{16}\}.$$

Exercice 2.

1. L'équation équivaut à $4\alpha = \alpha + 12$, donc $\alpha = 4$.
2. On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{1}{4}u_n - 1 = \frac{1}{4}(u_n - 4) = \frac{1}{4}v_n$.
3. On vient de voir que v_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et premier terme $u_0 - 4 = -1$. Donc
$$v_n = -\frac{1}{4^n}.$$
4. D'après la question précédente v_n tend vers 0. Donc $u_n = v_n + 4$ tend vers 4.

Exercice 3.

1. On part de $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$. Donc
$$2\cos^2(x) = \frac{(e^{ix}+e^{-ix})^2}{2} = \frac{e^{2ix}+2+e^{-2ix}}{4} = \cos(2x) + 1.$$
L'égalité à démontrer suit.

2. On a $\omega^5 = (e^{\frac{2i\pi}{5}})^5 = e^{2i\pi} = 1$.
3. Comme $|\omega|^2 = \omega\bar{\omega} = 1$, on a $\bar{\omega} = \frac{1}{\omega}$.
   Par ailleurs, en multipliant $\omega^5 = 1$ par ω^{-1}, on obtient $\omega^4 = \frac{1}{\omega}$.
   De même $\bar{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2}$ découle de $|\omega^2| = |\omega|^2 = 1$.
   Enfin, $\frac{1}{\omega^2} = \omega^3$ découle de $\omega^5 = 1$.
4. On a $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}} = \cos(\frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{2\pi}{5})$. Donc $\mathrm{Re}(\omega) = \cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\mathrm{Im}(\omega) = \sin(\frac{2\pi}{5})$.
5. Comme somme des termes d'une suite géométrique de raison $\omega \neq 1$, on a

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \frac{1-\omega^5}{1-\omega} = 0.$$

6. D'après la question 3, on a $\mathrm{Re}(\omega^4)$ $=\mathrm{Re}(\bar{\omega})$ $=\mathrm{Re}(\omega) = \cos(\frac{2\pi}{5})$. De même, on a $\mathrm{Re}(\omega^3)$ $=\mathrm{Re}(\bar{\omega}^2)$ $=\mathrm{Re}(\omega^2) = \cos(\frac{4\pi}{5})$. Donc, en prenant la partie réelle dans l'égalité de la question précédente, on obtient

$$1 + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) + 2\cos(\frac{4\pi}{5}) = 0.$$

   Or, d'après la question 1, $\cos(\frac{4\pi}{5}) = 2\cos^2(\frac{2\pi}{5}) - 1$. En substituant, on obtient l'égalité cherchée :

$$4\cos^2(\frac{2\pi}{5}) + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) - 1 = 0.$$

7. Le discriminant du polynôme de degré 2 de la question précédente vaut $\Delta = 4 + 16 = 20 = 4.5$, et $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{5}$. Donc les racines de ce polynôme sont

$$\frac{\pm\sqrt{5} - 1}{4}.$$

   Une seule de ces racines est positive comme $\cos(\frac{2\pi}{5})$. Donc

$$\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

8. On a

$$BI = |\frac{i}{2} + 1| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

9. On a

$$BA_2 = |\omega^2 + 1| = |(\cos(\frac{4\pi}{5}) + 1) + i\sin(\frac{4\pi}{5})| = \sqrt{(\cos(\frac{4\pi}{5}) + 1)^2 + \sin^2(\frac{4\pi}{5})} = \sqrt{2 + 2\cos(\frac{4\pi}{5})}.$$

   Avec la question 1, on obtient

$$BA_2 = \sqrt{4\cos^2(\frac{2\pi}{5})} = 2\cos(\frac{2\pi}{5}).$$

10. Comme les points B, J et I sont alignés (dans cet ordre), on a

$$BJ = BI - IJ = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

11. C'est immédiat avec les questions 7, 9 et 10.
12. D'après la question précédente A_2 est sur le cercle de centre B passant par J. Il est aussi sur le cercle unité et sa partie imaginaire est positive. Cela suffit à le déterminer.