Université Claude Bernard Lyon 1 | UE Fondamentaux des maths I
Semestre d'automne 2021-2022 | Groupe Math

Examen 1 – Questions préparées – le jeudi 7 octobre 2021

Question 1.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$.
3. En déduire une expression de
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (3k^2 + 3k + 1)$$
comme un polynôme en n.
4. En déduire une expression de
$$T_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$$
comme un polynôme en n.

Question 2.
Enoncer et démonstrer par récurrence de la formule du binôme de Newton.

Pour la démonstration, on pourra utiliser sans démonstration la formule de Pascal suivante :
$$\forall k, n \in \mathbb{N} \qquad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

Question 3.
Soit E un ensemble. Soit A, B et C trois parties de E. Montrer que
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Question 4.
Soit E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soit A et B deux parties de E. Montrer que
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$
Donner un exemple pour lequel
$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

Question 5.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante, d'inconnue x :
$$|x+1| + |4-x| = 5.$$