

## Correction Feuille 1 : Calculs algébriques

### Exercice 1-1

Soit  $x$  et  $y$  des réels ; en supposant qu'elle est bien définie, fournir une forme plus simple de chacune des expressions suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 1) (125)^{-2/3} & 2) (-5x)^3 & 3) \left(\frac{x^{-2}}{y^{-2}}\right) \left(\frac{x}{y}\right)^2 & 4) \sqrt[3]{\sqrt[4]{27}} \\
 5) -2\sqrt{9y} + 10\sqrt{y} & 6) \left[(x^2y^{-2})^{-1}\right]^{-1} & 7) 5^{-1/2} \cdot 5x^{11/6} \cdot (5x)^{-3/2} & 8) \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}{\frac{y}{x}} \\
 9) \frac{y}{5x-y} + \frac{5x}{y-5x} + 1 & 10) \frac{\frac{2}{x^2-1} + \frac{3}{x-1}}{3x+5} & 11) \frac{x+x^2+x^3+x^4}{x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+x^{-4}} & 12) \frac{1+x^5}{x^{-2}-x^{-3}+x^{-4}-x^{-5}+x^{-6}}
 \end{array}$$

### Correction exercice 1-1

1.  $\sqrt[3]{125} = 5$ , d'où  $(125)^{-2/3} = 1/25$ .
2.  $(-5x)^3 = (-1)^3 5^3 x^3 = -125x$ .
3. Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on a

$$\frac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha ;$$

on en déduit que

$$\frac{x^{-2}}{y^{-2}} \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 1.$$

4. On a  $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}} = \left(27^{1/4}\right)^{1/3} = 27^{(1/4) \cdot (1/3)} = \left(27^{1/3}\right)^{1/4} = 3^{1/4} = \sqrt[4]{3}$ .
5.  $\sqrt{9y} = \sqrt{9} \sqrt{y}$  ; donc, on peut factoriser par  $2\sqrt{y}$  et on trouve

$$-2\sqrt{9y} + 10\sqrt{y} = 2\sqrt{y} (5 - \sqrt{9}) = 4\sqrt{y}.$$

6.  $\left[(x^2y^{-2})^{-1}\right]^{-1} = (x^2y^{-2})^{(-1) \cdot (-1)} = x^2/y^2$ .
7. On a

$$5^{-1/2} \cdot 5x^{11/6} \cdot (5x)^{-3/2} = 5^{-1/2+1-3/2} x^{11/6-3/2} = 5^{-1} x^{1/3} = \frac{\sqrt[3]{x}}{5}.$$

8. On a

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} &= \frac{x - (x+1)}{(x+1)x} = \frac{-1}{(x+1)x} \\
 \frac{1}{y/x} &= \frac{x}{y},
 \end{aligned}$$

d'où on trouve  $\frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}{\frac{y}{x}} = \frac{-1}{(x+1)y}$ .

9. On a

$$\frac{y}{5x-y} + \frac{5x}{y-5x} + 1 = \frac{y}{5x-y} - \frac{5x}{5x-y} + 1 = \frac{y-5x}{5x-y} + 1 = 0.$$

10. En utilisant le fait que  $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ , le même calcul de l'expression 8 montre que le numérateur est égal à  $\frac{3x+5}{x^2-1}$ , et donc

$$\frac{\frac{2}{x^2-1} + \frac{3}{x-1}}{3x+5} = \frac{1}{x^2-1}.$$

11. On écrit le dénominateur de la façon suivante :

$$x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + x^{-4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4}.$$

En factorisant le numérateur par  $x$ , on trouve alors

$$\frac{x + x^2 + x^3 + x^4}{x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + x^{-4}} = \frac{x(x^3 + x^2 + x + 1)}{\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4}} = x^5.$$

12. On observe que

$$x^5 + 1 = x^5 - (-1) = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1).$$

D'autre côté, en raisonnant comme au point 11, le dénominateur s'écrit comme

$$x^{-2} - x^{-3} + x^{-4} - x^{-5} + x^{-6} = \frac{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}{x^6},$$

d'où on peut déduire que

$$\frac{1 + x^5}{x^{-2} - x^{-3} + x^{-4} - x^{-5} + x^{-6}} = x^6(x + 1).$$

**Exercice 1-2** Soit  $a, b, c$  et  $d$  des réels. Développer  $(a + b + c + d)^2$  puis  $(a + b + c)^3$ .

**Correction exercice 1-2**

C'est un calcul.

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

$$\begin{aligned} (a + b + c)^3 &= (a + b + c)^2(a + b + c) = (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc)(a + b + c) \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc. \end{aligned}$$

**Exercice 1-3** Soit  $x$  et  $y$  deux réels. On suppose que  $x - y = 1$ . Calculer  $x^3 - 3xy - y^3$ .

**Correction exercice 1-3** On observe que  $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ . En utilisant l'hypothèse  $x - y = 1$ , on trouve donc

$$x^3 - 3xy - y^3 = x^2 + xy + y^2 - 3xy = (x - y)^2 = 1.$$

**Exercice 1-4**

1. Rappeler la preuve, faite en cours, de la propriété suivante : pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

2. Expliciter deux réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\frac{2}{k(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+2}$ .

3. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$ .

4. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\prod_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{2^{n+1}}{(n+2)(n+1)(n!)^2}$ .

**Correction exercice 1-4**

1. Fait en cours.

2. En calculant le dénominateur en commun, on a

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+2} = \frac{a(k+2) + bk}{k(k+2)} = \frac{(a+b)k + 2a}{k(k+2)},$$

qui implique que  $a = 1$  et  $b = -a = -1$ .

3. En utilisant le résultat précédent, on peut écrire

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

4. On utilise encore le résultat du point 2 pour écrire

$$\prod_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \prod_{k=1}^n \frac{2}{k(k+2)} = 2^n \prod_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot \prod_{k=1}^n \frac{1}{(k+2)}.$$

Bien sûr, on a  $\prod_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1/n!$ . D'autre côté, on a aussi

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{(k+2)} = \prod_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} = 2 \left( \prod_{k=3}^n \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+2} = 2 \left( \prod_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+2}.$$

En mettant tout ensemble, on trouve

$$\prod_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = 2^{n+1} \frac{1}{(n!)^2} \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+2}.$$

### Exercice 1-5

- Donner deux différentes preuves de la formule du cours suivante : pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ .
  - En effectuant une démonstration par récurrence.
  - En montrant préalablement, par changement de variable, l'identité :

$$\sum_{k=0}^n (n-k) = \sum_{k=0}^n k.$$

- En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$ .

### Correction exercice 1-5

- Pour (a), on commence par vérifier l'initialisation : pour  $n = 1$ , on a  $\sum_{k=0}^1 k = 0 + 1 = 1$ , tandis que  $1 \cdot (1+1)/2 = 2/2 = 1$ . La formule est donc initialisée. On vérifie maintenant l'hérédité. Supposons que la propriété est vraie pour  $n$ , donc

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Il faut prouver la propriété pour  $n+1$ , c'est-à-dire il faut montrer que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

On commence par écrire  $\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^n k + (n+1)$ . En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

L'hérédité est donc vérifiée, et, par conséquent, la formule est prouvée pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Pour la partie (b), on admet l'identité (qui est un simple changement de variable). On appelle

$$S := \sum_{k=0}^n k$$

la quantité à déterminer. L'identité nous dit que  $\sum_{k=0}^n (n-k) = S$ . Mais, en développant le membre de gauche, on a

$$\sum_{k=0}^n (n-k) = \sum_{k=0}^n n - \sum_{k=0}^n k = n \sum_{k=0}^n 1 - S = n(n+1) - S.$$

On en déduit que  $n(n+1) - S = S$ , d'où  $S = n(n+1)/2$ .

2. C'est un calcul : grâce à la formule précédente, on peut calculer

$$\sum_{k=0}^n (2k+1) = 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 = 2 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)(n+1) = (n+1)^2.$$

### Exercice 1-6

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{i=0}^n \left( \sum_{j=0}^n (i+j) \right) = n(n+1)^2$ .

2. En utilisant sans les démontrer (ce serait facile par récurrence) les deux identités

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ et } \sum_{k=0}^n k^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2, \text{ montrer que pour tout } n \in \mathbb{N}^* :$$

$$\sum_{i=0}^n \left( \sum_{j=0}^i ij \right) = \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}.$$

### Correction exercice 1-6

1. En utilisant la formule de l'exercice précédent, on a

$$\sum_{j=0}^n (i+j) = \sum_{j=0}^n i + \sum_{j=0}^n j = (n+1)i + \frac{n(n+1)}{2},$$

qui donne

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (i+j) = (n+1) \sum_{i=0}^n i + \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=0}^n 1 = \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n(n+1)^2}{2} = n(n+1)^2.$$

La formule est donc prouvée.

2. De façon analogue, on a

$$\sum_{j=0}^i ij = i \sum_{j=0}^i j = \frac{i^2(i+1)}{2} = \frac{1}{2} (i^3 + i^2).$$

En utilisant cette propriété, on calcule

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i ij &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=0}^i i^3 + \sum_{j=0}^i i^2 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\ &= \frac{n(n+1)}{24} (3n(n+1) + 2(2n+1)), \end{aligned}$$

d'où on trouve facilement l'expression finale.

### Exercice 1-7

1. Pour  $0 \leq i \leq n$  et  $0 \leq j \leq n$ , quelles valeurs prend l'entier  $\text{Max}(i, j)$ ? Combien de fois prend-il une valeur  $k$  fixée?
2. En déduire que

$$\sum_{i=0}^n \left( \sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) \right) = \sum_{k=0}^n (2k+1)k.$$

3. En utilisant la formule de sommation des carrés des entiers consécutifs rappelée à l'exercice précédent, en déduire que :

$$\sum_{i=0}^n \left( \sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) \right) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}.$$

### Correction exercice 1-7

1. Étant donné que  $0 \leq i \leq n$  et  $0 \leq j \leq n$ , l'entier  $\text{Max}(i, j)$  peut prendre toutes les valeurs entre 0 et  $n$ . Maintenant, si on fixe  $k$  dans le même intervalle, on aura  $\text{Max}(i, j) = k$  pour :
  - toutes les couples  $(i, k)$ , avec  $0 \leq i < k$  : on a donc  $k$  couples ;
  - toutes les couples  $(k, j)$ , avec  $0 \leq j < k$  : encore  $k$  couples ;
  - la couple  $(k, k)$ .

En total, ça fait  $2k+1$  fois.

2. Deux solutions possibles.

(a) On découpe la somme à l'intérieur comme

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) &= \sum_{j=0}^i i + \sum_{j=i+1}^n j = i(i+1) + \sum_{j=0}^n j - \sum_{j=0}^i j \\ &= i(i+1) + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{i(i+1)}{2}. \end{aligned}$$

Si maintenant on calcule la somme à l'extérieur, en utilisant les formules des exercices 1-5 et 1-6, on trouve facilement

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) = \frac{1}{6} n(n+1)(4n+5).$$

C'est exactement le même résultat qu'on trouve quand on calcule la somme à droite, après avoir fait les multiplications à l'intérieur.

- (b) Vu que la fonction peut prendre toutes les valeurs  $k$  entre 0 et  $n$ , et que la valeur  $k$  est prise  $2k+1$  fois, on peut écrire notre somme comme la somme des valeurs que la fonction prend, multipliées par le nombre des fois qu'elles sont prises : notamment,

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) = \sum_{k=0}^n k(2k+1).$$

3. La réponse donnée au point précédent répond aussi à cette question.

### Exercice 1-8

1. Déterminer l'ensemble des réels  $x$  qui vérifient  $-3x + 4 \geq x - 3$ .
2. Déterminer l'ensemble des réels  $x$  qui vérifient  $x^2 - 4x - 2 \geq 0$ .
3. Déterminer l'ensemble des réels  $x$  qui vérifient  $(x + 2)^2 < -x$ .
4. Déterminer l'ensemble des réels  $x$  qui vérifient  $x^3 - 6x \geq x^2$ .

### Correction exercice 1-8

1. Un calcul simple permet de trouver  $4x \leq 7$ , d'où  $x \leq 7/4$ .
2. Ça suffit de chercher les racines du polynôme  $x^2 - 4x - 2$ , qui sont  $2 \pm \sqrt{6}$ . L'inégalité est alors vérifiée pour tous les nombres réels  $x$  tels que  $x \leq 2 - \sqrt{6}$  ou  $x \geq 2 + \sqrt{6}$ .
3. On développe le carré et on amène  $x$  à gauche : on trouve  $x^2 + 5x + 4 < 0$ . On remarque que  $x^2 + 5x + 4 = (x + 4)(x + 1)$ , et alors  $-4 < x < -1$ .
4. L'inégalité à résoudre est équivalente à  $x^3 - x^2 + 6x \geq 0$ . On peut factoriser le membre de gauche de la façon suivante :  $x^3 - x^2 + 6x = x(x^2 - x + 6) = x(x - 3)(x + 2)$ . Un tableau de signes permet de trouver la solution  $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3\}$ .

### Exercice 1-9

1. Pour  $a \in \mathbb{R}$ , on considère les réels  $A = \frac{a^4 - 7a^2 + 4}{3}$  et  $B = \frac{a^4 - 9a^2 + 5}{4}$ . Montrer que l'un de ces deux nombres (on précisera lequel) est toujours plus grand que l'autre.
2. Soit  $m$  et  $n$  deux réels. Pour  $a \in \mathbb{R}$ , on considère les réels  $C = \frac{a^4 + ma^2 + 2}{3}$  et  $D = \frac{a^4 + na^2 + 3}{4}$ . Montrer que le signe de  $D - C$  n'est pas constant quand  $a$  varie dans  $\mathbb{R}$ .

### Correction exercice 1-9

1. On impose la relation  $A \leq B$ . Après des calculs simples, on se reconduit à l'inégalité  $a^4 - a^2 + 1 \leq 0$ . Maintenant, en posant  $a^2 = y$ , c'est facile à voir que cette inégalité n'est jamais satisfaite (pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , on a  $y^2 - y + 1 > 0$ ). Donc, on en déduit que, pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on a  $A > B$ .
2. On calcule

$$D - C = \frac{1}{12} (-a^4 + (3n - 4m)a^2 + 1).$$

Maintenant, pour  $a = 0$ ,  $D - C = 1/12 > 0$ . Pour  $a \rightarrow +\infty$ , par contre,  $D - C \rightarrow -\infty$ , donc le signe de  $D - C$  n'est pas constant.

### Exercice 1-10

1. Déterminer l'ensemble des  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{6}\}$  qui vérifient  $\frac{-2}{6x + 5} > 1$ .
2. Déterminer l'ensemble des  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -\frac{2}{3}\}$  qui vérifient  $\frac{1}{x - 2} < \frac{2}{3x + 2}$ .

### Correction exercice 1-10

1. On amène le terme de gauche à droite : l'inégalité est donc équivalente à résoudre

$$1 + \frac{2}{6x + 5} < 0.$$

On calcule le dénominateur en commun, et on trouve

$$\frac{6x + 7}{6x + 5} < 0.$$

En dressant un tableau de signes, on conclut que l'inégalité est vérifiée pour  $x \in ] -7/6, -5/6[$ .

2. L'argument est tout à fait analogue au précédent : on amène le terme de gauche à droite et on calcule le dénominateur en commun. Après avoir multiplié par  $-1$  pour se retrouver avec un coefficient de  $x$  positif au numérateur, on se retrouve à résoudre l'inégalité équivalente

$$\frac{x+6}{(3x+2)(x-2)} < 0.$$

On résout cette inégalité en dressant un tableau de signe, et on trouve l'ensemble des solutions  $S = ]-\infty, -6[ \cup ]-2/3, 2[$ .

**Exercice 1-11** Montrer que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .

**Correction exercice 1-11**

Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on calcule

$$0 \leq (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy.$$

De la même manière, on a aussi

$$0 \leq (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy.$$

Donc, en mettant ensemble ces deux inégalités, on trouve

$$-(x^2 + y^2) \leq 2xy \leq x^2 + y^2$$

ce qui est équivalent à dire que  $2|xy| \leq x^2 + y^2$ .

**Exercice 1-12** Montrer que pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,  $|1 - x^4| \leq 4|1 - x|$ .

**Correction exercice 1-12** On commence par remarquer que

$$1 - x^4 = (1 - x^2)(1 + x^2) = (1 - x)(1 + x)(1 + x^2).$$

En utilisant le fait que  $|ab| = |a||b|$ , on peut amener le terme de droite à gauche du signe d'inégalité et on peut mettre en facteur  $|1 - x|$  : cela donne

$$|1 - x| (|1 + x||1 + x^2| - 4) \leq 0.$$

Maintenant,  $|1 - x| \geq 0$  pour tout  $x$ , donc cela suffit de résoudre

$$|1 + x||1 + x^2| - 4 \leq 0.$$

On note que, pour  $x \in [-1, 1]$ , les deux arguments de la valeur absolue sont positifs : en développant les produits, on trouve donc

$$x^3 + x^2 + x + 1 - 3 \leq 0.$$

Étant donné que  $x \in [-1, 1]$ , par inégalité triangulaire on a que

$$x^3 + x^2 + x \leq |x^3 + x^2 + x| \leq |x|^3 + |x|^2 + |x| \leq 3,$$

qui dit que l'inégalité de départ est toujours vérifiée pour  $x \in [-1, 1]$ .

**Exercice 1-13** Pour  $x$  réel, on note  $f(x) = |2 - |1 - x||$ . Exprimer  $f(x)$  sans utiliser de valeur absolue en discutant selon la position de  $x$  sur l'axe réel, et tracer le graphe de  $f$ .

**Correction exercice 1-13**

Premier cas :  $1 - x \geq 0$ , c'est-à-dire  $x \leq 1$ . Dans ce cas,  $f(x) = |2 - (1 - x)| = |1 + x|$ . Si en plus  $1 + x \geq 0$ , c'est-à-dire  $x \geq -1$ , alors  $f(x) = 1 + x$ .

Si, au contraire,  $x < -1$ , on trouve  $f(x) = -x - 1$ .

Deuxième cas : si  $1 - x < 0$ , c'est-à-dire  $x > 1$ , alors  $f(x) = |2 + (1 - x)| = |3 - x|$ . Si maintenant  $x \leq 3$ , alors  $f(x) = 3 - x$ ; si  $x > 3$ , on a  $f(x) = x - 3$ .

Conclusion : Pour  $x < -1$ , on a  $f(x) = -x - 1$ . Pour  $-1 \leq x \leq 1$ , on a  $f(x) = 1 + x$ . Pour  $1 < x \leq 3$ , on a  $f(x) = 3 - x$ . Enfin, si  $x > 3$ , on a  $f(x) = x - 3$ .

**Exercice 1-14** Déterminer l'ensemble des réels  $x$  qui vérifient  $|2 - x| \leq 3 - x$ .

**Correction exercice 1-14**

On sépare l'étude dans les deux cas suivants.

(i) Si  $2 - x \geq 0$ , alors l'inégalité devient

$$2 - x \leq 3 - x \quad \Longrightarrow \quad 2 \leq 3,$$

ce qui est vrai pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Mais  $x$  doit vérifier  $x \leq 2$ , donc l'ensemble des solutions de la première inégalité est  $] - \infty, 2]$ .

(ii) si  $2 - x < 0$ , alors on trouve

$$-2 + x \leq 3 - x \quad \Longrightarrow \quad 2x \leq 1,$$

ce qui est vrai pour  $x \leq 1/2$ . Mais  $x$  devait être plus grande que 2, donc la deuxième inégalité n'a pas de solutions.

En conclusion, l'inégalité est satisfaite pour tout  $x \in ] - \infty, 2]$ .

**Exercice 1-15** Expliciter trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que pour tout réel  $x$  on ait :

$$x^3 - x^2 + 2x + 4 = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$$

puis en déduire l'ensemble des  $x$  réels pour lesquels  $x^3 - x^2 + 2x + 4 > |x + 1|$ .

**Correction exercice 1-15**

En développant les produits à droite, on trouve l'égalité

$$x^3 - x^2 + 2x + 4 = ax^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + c.$$

On en déduit que

$$a = 1, \quad a + b = -1, \quad b + c = 2, \quad c = 4,$$

c'est-à-dire  $a = 1$ ,  $c = 4$  et  $b = -2$ .

Pour telles valeurs de  $(a, b, c)$ , on a une factorisation de  $x^3 - x^2 + 2x + 4$  :

$$x^3 - x^2 + 2x + 4 = (x + 1)(x^2 - 2x + 4).$$

On remarque que  $x^2 - 2x + 4 \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  (soit on calcule les racines réelles par la formule, soit on reconnaît que ce terme est de la forme  $a^2 + ab + b^2$ ). L'inégalité à résoudre devient alors

$$(x + 1)(x^2 - 2x + 4) > |x + 1|.$$

Vu que le terme de droite est positif et que  $x^2 - 2x + 4 \geq 0$ , on doit avoir forcément  $x + 1 > 0$ , c'est-à-dire  $x > -1$ . En utilisant cette remarque, on va résoudre alors

$$(x + 1)(x^2 - 2x + 4) > x + 1 \quad \Longrightarrow \quad (x + 1)(x^2 - 2x + 3) > 0.$$

Encore une fois,  $x + 1 > 0$ ; en plus, et donc il faut résoudre  $x^2 - 2x + 3 > 0$ . Le polynôme  $x^2 - 2x + 3$  a seulement des racines complexes, autrement dit la dernière inégalité est toujours vraie. L'ensemble des solutions est donc  $] - 1, +\infty[$ .

**Exercice 1-16**

1. En utilisant la formule du binôme, calculer les sommes  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$  et  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$ .

2. a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $p \in \{1, \dots, n\}$ ,  $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$ .

b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{p=0}^n p \binom{n}{p} = n2^{n-1}$ .

3. À l'aide de la formule du triangle de Pascal, montrer que pour tout  $(p, n) \in \mathbb{N}^2$  :

$$\sum_{k=0}^n \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}.$$



## Correction exercice 1-16

1. On a

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$
$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (1-1)^n = 0.$$

2. Pour  $n$  et  $p$  comme dans le texte, on calcule

$$p \binom{n}{p} = p \frac{n!}{(n-p)! p!} = \frac{n(n-1)!}{(n-p-1+1)!(p-1)!} = n \frac{(n-1)!}{((n-1)-(p-1))!(p-1)!} = n \binom{n-1}{p-1}.$$

On en déduit la formule donnée. En fait, pour  $n = 0$ , il n'y a rien à prouver (on trouve  $0 = 0$ , qui est toujours vrai). Supposons alors  $n \geq 1$ . On remarque que le premier terme dans la somme à gauche (correspondant à  $p = 0$ ) est nul ; donc on peut écrire

$$\sum_{p=0}^n p \binom{n}{p} = \sum_{p=1}^n p \binom{n}{p} = \sum_{p=1}^n n \binom{n-1}{p-1} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n 2^{n-1},$$

qui est exactement ce qu'on voulait prouver.

3. Observons que, si  $n = 0$ , les deux membres de l'égalité à prouver valent 1, et donc l'égalité est vraie. Supposons maintenant  $n \geq 1$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . On commence par remarquer que

$$(*) \quad \sum_{k=0}^n \binom{p+k}{k} = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{p+k}{k}.$$

Maintenant, la formule du triangle de Pascal nous dit que, pour tout  $k \geq 1$  et tout  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$\binom{p+k}{k} + \binom{p+k}{k-1} = \binom{p+k+1}{k}.$$

En prenant la somme sur  $k = 1 \dots n$  à gauche et à droite, on déduit que

$$\sum_{k=1}^n \binom{p+k}{k} + \sum_{k=1}^n \binom{p+k}{k-1} = \sum_{k=1}^n \binom{p+k+1}{k}.$$

En faisant le changement de variable  $j = k + 1$  dans la somme à droite, on trouve

$$\sum_{k=1}^n \binom{p+k}{k} + \sum_{k=1}^n \binom{p+k}{k-1} = \sum_{j=2}^{n+1} \binom{p+j}{j-1} = \sum_{j=1}^n \binom{p+j}{j-1} - 1 + \binom{p+n+1}{n}.$$

On peut simplifier le terme qui apparaît à droite et à gauche, et on obtient

$$\sum_{k=1}^n \binom{p+k}{k} = -1 + \binom{p+n+1}{n}.$$

En utilisant cette égalité dans (\*), on déduit tout de suite la formule souhaitée.

## Exercice 1-17 Soit $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ .
2. Montrer que pour tout  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $\binom{2n}{k} < \binom{2n}{k+1}$ . En déduire que pour tout  $k \in \{0, \dots, 2n\}$ ,  $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$ .

3. Montrer que  $\frac{2^{2n}}{2n+1} \leq \binom{2n}{n}$ . (Indication : on pourra considérer l'entier  $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$ ).

### Correction exercice 1-17

1. C'est un calcul simple : par définition, on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

2. L'inégalité à prouver est équivalent à l'inégalité suivante : pour tout  $0 \leq k \leq n-1$ ,

$$\frac{1}{k!(2n-k)!} < \frac{1}{(k+1)!(2n-k-1)!} \Leftrightarrow \frac{(k+1)!}{k!} < \frac{(2n-k)!}{(2n-k-1)!},$$

c'est-à-dire  $k+1 < 2n-k$ , ce qui est toujours vrai (car  $k \leq n-1$ ). Soit maintenant  $k = n+1, \dots, 2n$  : grâce à la question du point 1, on peut écrire

$$\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k}.$$

Vu que  $n+1 \leq k \leq 2n$ , on a que  $0 \leq 2n-k \leq n-1$ , qui implique (grâce à l'inégalité prouvée ci-dessus)

$$\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k} < \binom{2n}{2n-k+1} = \binom{2n}{k-1}.$$

En conclusion, la valeur maximale est atteinte pour  $k = n$ , et on a donc

$$\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$$

pour tout  $k$  entre 0 et  $2n$ .

### Exercice 1-101

1. Expliciter deux constantes réelles  $a$  et  $b$  telles que pour tout entier  $k \in \mathbb{N}^*$ , on ait :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{a}{k+2}.$$

2. Soit  $n \geq 2$  un entier. Utiliser la question précédente pour obtenir une expression pas trop compliquée de la somme  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ .

**Exercice 1-102** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . L'objectif de cet exercice est de refaire l'exercice 7 **sans** considérer comme connue la formule de sommation des carrés d'entiers consécutifs. On notera  $S = \sum_{k=0}^n k^2$ , et on fera semblant de ne pas savoir calculer cet entier  $S$ .

1. En refaisant à l'identique l'exercice 7, montrer que :

$$\sum_{i=0}^n \left( \sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) \right) = 2S + \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Soit  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

a) Montrer que  $\sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) = \sum_{j=0}^i i + \sum_{j=i+1}^n j$ .

b) Montrer d'une part que  $\sum_{j=0}^i i = i(i+1)$  et d'autre part que  $\sum_{j=i+1}^n j = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}$ .

3. En utilisant la question précédente, obtenir la relation :

$$4 \sum_{i=0}^n \left( \sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) \right) = 2 \sum_{i=0}^n (n(n+1) + i^2 + i).$$

4. En rapprochant les formules prouvées aux questions 1 et 3, conclure.

**Exercice 1-103** Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

**Exercice 1-104**

- Déterminer l'ensemble des réels  $x$  qui vérifient  $x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0$ .
- Déterminer l'ensemble des  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$  qui vérifient  $\frac{x-6}{3-x} < \frac{x+6}{x+1}$ .
- Déterminer l'ensemble des réels  $x$  qui vérifient  $|x-3| + |x-7| = 4$ .
- Déterminer l'ensemble des réels  $x$  qui vérifient  $|x-1| + |x-2| < 1$ .

**Exercice 1-105** Soit  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $0 < x \leq y$ . On pose :

$$m = \frac{x+y}{2}, \quad g = \sqrt{xy}, \quad h = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

L'objectif de l'exercice est de montrer la chaîne d'inégalités :  $x \leq h \leq g \leq m \leq y$ .

- Montrer que  $m \leq y$ .
- Montrer que  $g \leq m$ .
- Montrer que  $x \leq h$ . (Indication : on pourra chercher à comparer  $1/x$  et  $1/h$ ).
- Montrer que  $h \leq g$ .

**Exercice 1-106** Soit  $a$  et  $b$  deux réels avec  $0 < a < b$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  un entier. L'objectif est d'étudier le sens de variation du  $k$ -ème terme du développement de  $(a+b)^n$ . Plus précisément, pour chaque indice  $k$  variant entre 0 et  $n$ , on note  $u_k = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$  et on s'intéresse à la liste de réels  $(u_0, \dots, u_n)$ .

- Montrer que pour tout entier  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{n-k}{k+1} \frac{b}{a}$ .
- Montrer que pour tout  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $\frac{u_{k+1}}{u_k} = 1 \iff k = \frac{nb-a}{a+b}$  et  $\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1 \iff k < \frac{nb-a}{a+b}$ .
- Dans cette question, on suppose que  $n < \frac{b}{a}$ . Montrer que  $u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n$ .
- Dans cette question, on suppose que  $n = \frac{b}{a}$ . Montrer que  $u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_{n-1} = u_n$ .
- (Question plus difficile demandant de l'initiative). Et quand  $n > \frac{b}{a}$ , comment se comporte la liste  $(u_0, \dots, u_n)$  ?

**Exercice 1-107**

1. On rappelle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ .

(a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $S_n = \sum_{k=1}^n (k-1)k$ .

(b) On pose  $v_k = k(k-1)(k-2)$ .

i. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_{k+1} - v_k = 3k(k-1)$ .

ii. Calculer alors  $T_n = \sum_{k=1}^n (v_{k+1} - v_k)$ .

iii. En déduire un lien entre  $S_n$  et  $T_n$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $C = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n 2^{k-l}$ .