

## Feuille 2 : Sur les applications

### Exercice 2-1

1. On note  $A = \{1, 2, 3\}$  et  $B = \{0, 1, 2, 3\}$ . Décrire les ensembles  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ .
2. On note  $A = [1, 3]$  et  $B = [2, 4]$ . Déterminer  $A \cap B$  et  $A \cup B$ .
3. On note  $A = ]-\infty, 3]$ ,  $B = ]-2, 7]$  et  $C = ]-5, +\infty[$ . Déterminer  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $B \cap C$  et  $B \cup C$ .

### Exercice 2-2

Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles. Montrer l'équivalence :

$$A \subset B \iff A \cup B = B.$$

### Exercice 2-3

Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois ensembles.

1. L'implication suivante est-elle vraie :

$$(A \cup B) \not\subset C \implies (A \not\subset C \text{ ou } B \not\subset C) ?$$

2. On suppose que l'on a les deux inclusions suivantes :  $A \cup B \subset A \cup C$  et  $A \cap B \subset A \cap C$ . Montrer que  $B \subset C$ .

### Exercice 2-4

Énoncer la négation de chacun des énoncés suivants. Est-ce l'énoncé ou sa négation qui est vrai ?

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, (x = |x| \text{ ou } x = -|x|)$ .
2.  $(\forall x \in \mathbb{R}, x = |x|)$  ou  $(\forall x \in \mathbb{R}, x = -|x|)$ .
3.  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y - x + x^2 < 0$ .
4.  $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y - x + x^2 > 0$ .

### Exercice 2-5

En utilisant un raisonnement par la contraposée, montrer l'implication suivante pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$  :

$$(\forall \varepsilon > 0, a \leq b + \varepsilon) \implies a \leq b.$$

### Exercice 2-6

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur  $I$  à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs en n'utilisant que des symboles les assertions suivantes :

1.  $f$  s'annule ;
2.  $f$  est l'application nulle ;
3.  $f$  n'est pas une application constante ;
4.  $f$  ne prend jamais deux fois la même valeur ;
5.  $f$  s'annule au plus une fois.

### Exercice 2-7

1. Soient les fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définies pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = 3x + 1$  et  $g(x) = x^2 - 1$ . Calculer  $f \circ g$  et  $g \circ f$ . Qu'observe-t-on ?
2. À partir des expressions formelles suivantes, déterminer deux fonctions  $u$  et  $v$  telles que  $h = u \circ v$  en précisant leurs ensembles de départ et d'arrivée :

$$(a) h(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \quad (b) h(x) = \frac{1}{x+7}; \quad (c) h(x) = \sqrt{3x-1}.$$

### Exercice 2-8

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x + 1$ . Déterminer pour tout  $x \in \mathbb{R}$   $(f \circ f \circ f \circ f \cdots \circ f)(x)$  (où  $f$  apparaît  $n$  fois) en fonction de  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### Exercice 2-9

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1.  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x^2$

6.  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \{14\}$   
 $x \mapsto 14$

10.  $f : \{1\} \longrightarrow \{1/2\}$   
 $x \mapsto \frac{1}{x+1}$

2.  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$   
 $x \mapsto x^2$

7.  $f : \{17\} \longrightarrow \{12; 17\}$   
 $x \mapsto 17$

11.  $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$   
 $n \mapsto n+1$

3.  $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$   
 $n \mapsto n$

8.  $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{1}{x}$

12.  $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$   
 $n \mapsto n+1$

4.  $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 2x$

9.  $f : \{0\} \longrightarrow \{0\}$   
 $x \mapsto 0$

13.  $k : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

### Exercice 2-10

- On définit  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  par  $f(m, n) = mn$ . Cette application est-elle ou non injective, surjective, bijective ?
- On définit  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  par  $g(k) = (k, (k+1)^2)$ . Cette application est-elle ou non injective, surjective, bijective ?

### Exercice 2-11

Soient  $I$  et  $J$  des parties de  $\mathbb{R}$ , et  $f : I \rightarrow J$  définie pour tout  $x \in I$  par  $f(x) = x^2$ .

- Donner des ensembles  $I$  et  $J$  tels que  $f$  soit injective mais pas surjective.
- Donner des ensembles  $I$  et  $J$  tels que  $f$  soit surjective mais pas injective.
- Donner des ensembles  $I$  et  $J$  tels que  $f$  ne soit ni injective ni surjective.
- Donner des ensembles  $I$  et  $J$  tels que  $f$  soit injective et surjective.

### Exercice 2-12

- Soit  $q_1, q_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Montrer que :

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}.$$

- On définit  $f : \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}) \rightarrow \mathbb{Q}$  par :

$$f(p, q) = p + \frac{1}{q}.$$

Cette application est-elle injective, surjective, bijective ?

### Exercice 2-13

On définit une partie du plan par  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -y \leq x \leq y\}$  puis une application  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$ .

- Représenter graphiquement  $D$ .
- (a) Montrer que si deux couples de réels  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  vérifient le système :

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

alors  $x_1 = x_2$  et  $y_1 = y_2$ .

(b) En déduire que  $f$  est injective.

- Est-ce que  $f$  est surjective ?

### Exercice 2-14

Soient  $E, F$  et  $G$  trois ensembles, et soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications.

- Montrer que si  $f$  et  $g$  sont injectives, alors  $g \circ f$  est injective.
- Montrer que si  $f$  et  $g$  sont surjectives, alors  $g \circ f$  est surjective.

3. Que peut-on conclure sur  $g \circ f$  si  $f$  et  $g$  sont bijectives ?
4. Montrer que si  $g \circ f$  est injective, alors  $f$  est injective.
5. Montrer que si  $g \circ f$  est surjective, alors  $g$  est surjective.
6. Si à présent  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow E$ , déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :

$$(a) \quad g \circ f = Id_E; \qquad (b) \quad f \circ g = Id_F; \qquad (c) \quad f \circ f = Id_E.$$

**Exercice 2-15** On considère l'application  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $f(n) = n^2$ .

1. Existe-t-il  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$  ?
2. Existe-t-il  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $h \circ f = Id_{\mathbb{N}}$  ?

**Exercice 2-16**

1. Soit  $f$  l'application de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4\}$  dans lui-même, définie par :

$$f(1) = 4, f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 2$$

- (a) Déterminer  $f(A)$  lorsque  $A = \{1\}$ ,  $A = \{1, 3\}$ ,  $A = \{3, 4\}$  et  $A = \emptyset$ .
  - (b) Déterminer  $f^{-1}(B)$  lorsque  $B = \{2\}$ ,  $B = \{1, 2\}$  et  $B = \{3\}$ .
2. Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$ . Déterminer  $f^{-1}(B)$  lorsque  $B = \{1\}$  et  $B = [1, 2]$ .

**Exercice 2-17**

Décrire (sans démonstration rigoureuse) les ensembles qui suivent.

- |                               |   |
|-------------------------------|---|
| 1. $\tan(\{0\})$ ;            | 7. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ;   |
| 2. $\sin^{-1}(\{2\})$ ;       | 8. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : [-1/2, 4/3] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ;  |
| 3. $\exp(]-\infty, 2])$ ;     | 9. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ; |
| 4. $\exp^{-1}([-1, e])$ ;     | 10. $(\cos_{ [0, \pi]})^{-1}([0, 1])$ ;   |
| 5. $\ln(\mathbb{R}^{+*})$ ;   | 11. $(\cos_{ [3\pi, 7\pi]})^{-1}([0, 1])$ ;   |
| 6. $\ln^{-1}([3, +\infty[)$ . | 12. $\cos^{-1}([0, 1])$ ;   |

**Exercice 2-18**

Soient  $E$  un ensemble et  $f$  une application de  $E$  dans lui-même telle que  $f(f(E)) = E$ . Montrer que  $f$  est surjective.

**Exercice 2-19**

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- i)  $f$  est injective;
- ii) Pour tous  $A_1, A_2$  parties de  $X$ , on a  $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ .

**Exercice 2-20** Montrer que chacune des applications suivantes est bijective en explicitant sa réciproque :

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 3x + 1$ .
2.  $g : ]e, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g(x) = \ln(\ln(\ln x))$ .
3.  $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $a(s, t) = (2s, 3t)$ .
4.  $b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $b(s, t) = (s + t, s - t)$ .
5.  $F : [1, 10[ \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  définie par  $F(t, n) = t \cdot 10^n$ .

**Exercice 2-21**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une bijection. On suppose  $f$  strictement croissante. Montrer que la bijection réciproque  $f^{-1}$  est également strictement croissante.

**Exercice 2-22**

Soit  $E, F$  et  $G$  trois ensembles et soit  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications. On suppose  $g$  et  $g \circ f$  bijectives. En utilisant la bijection réciproque  $g^{-1}$ , montrer que  $f$  est bijective.

### Exercice 2-101

Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  l'application définie pour tout  $k \in \mathbb{N}$  par  $f(2k) = k$  et  $f(2k + 1) = -k - 1$ .

1. Soit  $m$  un entier positif. Déterminer tous les antécédents de  $m$ .
2. Soit  $m$  un entier strictement négatif. Déterminer tous les antécédents de  $m$ .
3. L'application  $f$  est-elle une bijection ?

### Exercice 2-102

Soient  $I \subset \mathbb{R}$  et  $J \subset \mathbb{R}$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ , et  $f : I \rightarrow J$  une application strictement croissante.

1. Montrer que  $f$  est injective. On pourra montrer la contraposée en utilisant le fait que  $x_1 \neq x_2$  est équivalent à  $x_1 < x_2$  ou  $x_1 > x_2$ .
2. Déterminer l'ensemble  $K$  tel que  $f : I \rightarrow K$  soit bijective.

### Exercice 2-103

Soit  $f : E \rightarrow F$ . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- i)  $\exists G \subset F$  telle que  $f$  est une bijection de  $E$  dans  $G$ ;
- ii)  $f$  est injective.

### Exercice 2-104

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ .

1. Soit  $y$  un réel. Combien  $y$  possède-t-il d'antécédents ? (On discutera selon la valeur de  $y$ ).
2.  $f$  est-elle injective ? surjective ?
3. Déterminer l'ensemble  $f(\mathbb{R})$ .
4. (a) Soit  $y$  un réel ayant exactement deux antécédents  $x_1$  et  $x_2$  par  $f$ . Déterminer la valeur du produit  $x_1 x_2$ , puis montrer qu'un et un seul des réels  $x_1$  et  $x_2$  appartient à l'intervalle  $[-1, 1]$ .  
(b) En déduire que la restriction  $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  définie par  $g(x) = f(x)$  est une bijection.

### Exercice 2-105

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles, et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . Soient également  $A_1$  et  $A_2$  deux parties de  $E$ , et  $B_1$  et  $B_2$  deux parties de  $F$ .

1. Montrer que  $B_1 \subset B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ . La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que  $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ . L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ .

### Exercice 2-106

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles, et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

1. Montrer que pour toute partie  $A$  de  $E$ , on a  $A \subset f^{-1}(f(A))$ .
2. Montrer que pour toute partie  $B$  de  $F$ , on a  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ .
3. Montrer que  $f$  est injective si et seulement si pour toute partie  $A$  de  $E$ , on a  $A = f^{-1}(f(A))$ .
4. Montrer que  $f$  est surjective si et seulement si pour toute partie  $B$  de  $F$ , on a  $f(f^{-1}(B)) = B$ .

### Exercice 2-107

Soit  $E$  un ensemble et  $f : E \rightarrow E$  une application. On suppose  $f \circ f \circ f = \text{Id}_E$ . Montrer que  $f$  est une bijection.