Exercice 2-1

1. Soit f l'application de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ dans lui-même définie par :
$$f(1)=4,\ \ f(2)=1\ \ ,f(3)=2,\ \ f(4)=2.$$
Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A=\{2\}$, $A=\{1,2\}$, $A=\{3\}$.
2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$. Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A=\{1\}$, $A=[1,2]$.

Correction exercice 2-1

1. $f^{-1}(\{2\})=\{3,4\}; f^{-1}(\{1,2\})=\{2,3,4\}\ ; f^{-1}(\{3\})=\emptyset$
2.
$$f^{-1}(\{1\})=\{-1,1\}$$
$$f^{-1}([1,2])=\left[-\sqrt{2},-1\right]\cup\left[1,\sqrt{2}\right]$$

Exercice 2-3

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.

1. Que pensez-vous de l'implication
$$A\cup B\not\subseteq C\Rightarrow(A\not\subseteq C\text{ ou }B\not\subseteq C)\ ?$$

Justifiez (on pourra utiliser la contraposée).

2. On suppose que l'on a les inclusions suivantes : $A\cup B\subset A\cup C$ et $A\cap B\subset A\cap C$. Montrer que $B\subset C$.

Correction exercice 2-3

1. La contraposée de cette implication est :
$$(A\subset C\quad\text{et}\quad B\subset C)\Rightarrow A\cup B\subset C$$
Cette implication est vraie.
2. Prenons $x\in B$.
Alors $x\in A\cup B$, alors $x\in A\cup C$ d'après l'hypothèse.
Si $x\in C$ c'est fini. Si $x\in A\setminus C$ alors $x\in A\cap B$ (puisque l'on a pris $x\in B$), d'après l'hypothèse $x\in A\cap C$ ce qui entraine que $x\in C$.
On a bien montré que $B\subset C$.

Exercice 2-10

1. Soit $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ définie pour tout $(n,m)\in\mathbb{N}^2$ par $f(n,m)=mn$
f est-elle injective, surjective, bijective ?
2. Soit $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^2$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $g(n)=(n,(n+1)^2)$
g est est-elle injective, surjective, bijective ?

Correction exercice 2-10

1.
$$f(1,2)=1\times2=2\times1=f(2,1)$$
Donc f n'est pas injective.
$$f(1,p)=1\times p=p$$
Donc pour tout $p\in\mathbb{N}$, il existe $(n,m)=(1,p)$ tel que $p=f(n,m)$
f est surjective.
f pas bijective
2.
$$g(n_1)=g(n_2)\Rightarrow(n_1,(n_1+1)^2)=(n_2,(n_2+1)^2)\Rightarrow\begin{cases}n_1=n_2\\(n_1+1)^2=(n_2+1)^2\end{cases}\Rightarrow n_1=n_2$$
Donc g est injective.
On va montrer que $(1,1)$ n'admet pas d'antécédent. Supposons que
$$(1,1)=(n,(n+1)^2)$$
Alors

$$\begin{cases} 1 = n \\ 1 = (n+1)^2 \end{cases}$$

Ce qui équivaut à

$$\begin{cases} 1 = n \\ 1 = 2^2 \end{cases}$$

g pas bijective.

Exercice 2-11

Soit $f: I \to J$ définie par $f(x) = x^2$

1. Donner des ensembles I et J tels que f soit injective mais pas surjective.
2. Donner des ensembles I et J tels que f soit surjective mais pas injective.
3. Donner des ensembles I et J tels que f soit ni injective ni surjective.
4. Donner des ensembles I et J tels que f soit injective et surjective.

Correction exercice 2-11

1. $I = [0,1]$ et $J = [-1,1]$.
2. $I = [-1,1]$ et $J = [0,1]$.
3. $I = [-1,1]$ et $J = [-1,1]$.
4. $I = [0,1]$ et $J = [0,1]$.

   Ce ne sont que des exemples.

Exercice 2-12

1. Soient $q_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $q_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

Montrer que :

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}$$

2. Soit $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{Q}$ l'application définie par :

$$f(p,q) = p + \frac{1}{q}$$

   a. Montrer que f est injective ?
   b. f est-elle surjective ?

Correction exercice 2-12

1.

$$q_1 \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{q_1} \leq \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$q_2 \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{q_2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{q_2} < 0 \quad (2)$$

En additionnant (1) et (2)

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}$$

2.

   a. Pour tout $(p_1, q_1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $(p_2, q_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

$$f(p_1, q_1) = f(p_2, q_2) \Rightarrow p_1 + \frac{1}{q_1} = p_2 + \frac{1}{q_2} \Rightarrow \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} = p_2 - p_1$$

D'après la première question cela montre que $p_2 - p_1 \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ or $p_2 - p_1 \in \mathbb{Z}$ donc $p_2 - p_1 = 0$, autrement dit $p_1 = p_2$, puis en reportant dans

$$p_1 + \frac{1}{q_1} = p_2 + \frac{1}{q_2}$$

Cela montre que $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{q_2}$ et que $q_1 = q_2$

Finalement

$$(p_1, q_1) = (p_2, q_2)$$

Ce qui montre que f est injective.

b. Regardons si $1 \in \mathbb{Q}$ admet un antécédent, on suppose qu'il existe, on l'appelle (p, q)

$$p + \frac{1}{q} = 1$$

Ce qui équivaut à

$$\frac{1}{q} = 1 - p$$

Mais $\frac{1}{q} \notin \mathbb{Z}$ et $1 - p \in \mathbb{Z}$, ce qui est impossible. Par conséquent f n'est pas surjective.

Exercice 2-13

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -y \leq x \leq y\}$

Soit $f: D \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$

1. Représenter D dans le plan.
2. a. Montrer que si deux couples de réels (x_1, y_1) et (x_2, y_2) vérifient

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

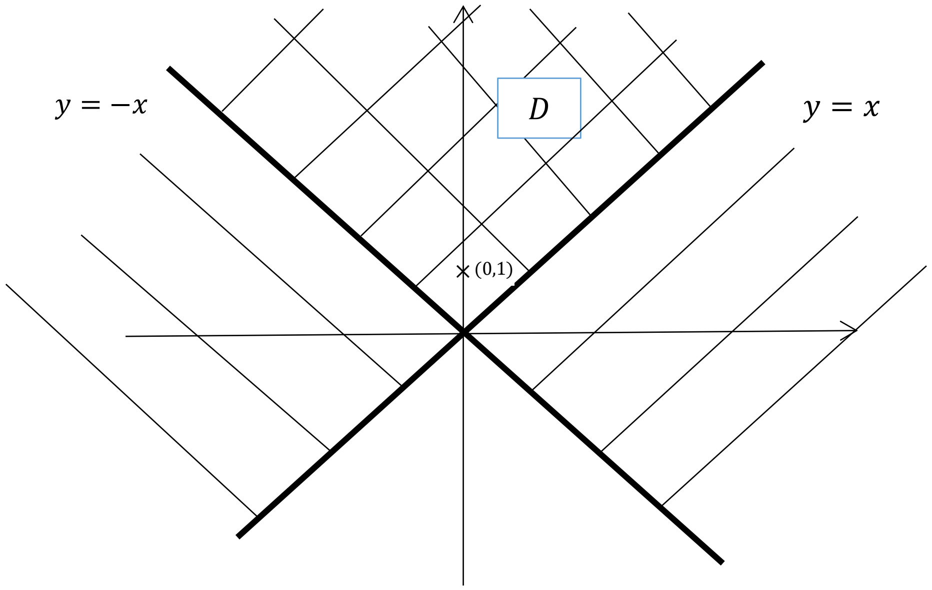
Alors $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ (autrement dit $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$).

b. Montrer que f est injective, on pourra se ramener au système du 2.a..

3. Est-ce que f est surjective ?

Correction 2-13

1. Le point $(0,1)$ vérifie $x \leq y$ donc $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y\}$ est le demi-plan supérieur droit. De même $(0,1)$ vérifie $-y \leq x$ donc $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -y \leq x\}$ est le demi-plan supérieur droit, D est l'intersection de ces deux demi-plan, D est le quart de plan supérieur du schéma ci-dessous.



2. a.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

En additionnant L_1 et L_2 on trouve que $2x_1 = 2x_2$, donc $x_1 = x_2$, puis en remplaçant dans L_1, on trouve que $y_1 = y_2$.

b.

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1^2 + y_1^2, 2x_1y_1) = (x_2^2 + y_2^2, 2x_2y_2) \Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \\ 2x_1y_1 = 2x_2y_2 \end{cases}$$

$L_1 - L_2$ donne $x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2$, ce qui entraine que $(x_1 - y_1)^2 = (x_2 - y_2)^2$, comme $x - y \leq 0$ sur D, cela donne $-(x_1 - y_1) = -(x_2 - y_2)$ ou encore $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$.

$L_1 + L_2$ donne $x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 + 2x_2y_2$, ce qui entraine que $(x_1 + y_1)^2 = (x_2 + y_2)^2$, comme $x + y \geq 0$ sur D, cela donne $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$.

D'après 2.a. cela donne que $x_1 = x_2$ et que $y_1 = y_2$, ce qui montre que f est injective.

3. $(-1,1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ n'a pas d'antécédent dans D car $x^2 + y^2 > 0$.

Exercice 2-15

Soient E, F et G trois ensemble et soient $f: E \to F$ et $g: F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
3. Que peut-on conclure sur $g \circ f$ si f et g sont bijectives ?
4. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
5. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
6. Si à présent $f: E \to F$ et $g: F \to E$, déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :
   a. $g \circ f = Id_E$
   b. $f \circ g = Id_F$
   c. $f \circ f = Id_E$

Correction exercice 2-15

1. $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

   Car g est injective

   $$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

   Car f est injective.

   Donc $g \circ f$ est injective.

2. Première méthode :

   Pour tout $z \in G$ il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$ car g est surjective.

   Comme pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car f est surjective. On en déduit que pour tout $z \in G$ il existe $x \in E$ tel que $z = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x)$ autrement dit $g \circ f$ est surjective.

Remarque :

(a) D'habitude on appelle y un élément de l'image G mais ici ce pose un petit problème de notation parce que l'on va appeler x l'élément de F et on ne saura pas trop comment appeler l'élément de E, c'est pour cela qu'il est plus malin de l'appeler z.

(b) Si on commence par écrire « pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car f est surjective » puis « pour tout $z \in G$ il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$ car g est surjective » donc « pour tout $z \in G$ il existe $x \in E$ tel que $z = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x)$ » cela ne va pas, je vous laisse réfléchir pourquoi.

   Deuxième méthode :

   On rappelle que $\varphi: U \to V$ est surjective si et seulement si $\varphi(U) = V$

   Donc $f(E) = F$ et $g(F) = G$, par conséquent $g \circ f(E) = g\big(f(E)\big) = g(F) = G$ et on en déduit que $g \circ f$ est surjective.

3. Si g et f sont bijectives alors elles sont injectives et $g \circ f$ est injective et si g et f sont bijectives alors elles sont surjectives et $g \circ f$ est surjective, on en déduit que $g \circ f$ est bijective.
4. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) \Rightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

   Car $g \circ f$ est injective, par conséquent f est injective.

5. Première méthode :

   Pour tout $z \in G$, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$, donc il existe $y = f(x)$ tel que $z = g(y)$ ce qui signifie que g est surjective.

   Deuxième méthode :

   Comme $g \circ f$ est surjective, $g \circ f(E) = G \Leftrightarrow g\big(f(E)\big) = G$ or $f(E) \subset F$ donc

   $$g\big(f(E)\big) \subset g(F)$$

   Comme $g(F) \subset G$, cela donne

   $$G = g\big(f(E)\big) \subset g(F) \subset G$$

   D'où

$$g(f(E)) = g(F) = G \Rightarrow g(F) = G$$

Ce qui montre que g est surjective.

6.

a. $g \circ f = Id_E$ est bijective (l'identité est bijective)

$g \circ f$ est injective, d'après 4°), f est injective.

$g \circ f$ est surjective, d'après 5°), g est surjective.

Remarque :

$g \circ f = Id_E$ n'entraine pas que $g = f^{-1}$ et que donc f et g sont bijectives.

b. $f \circ g = Id_F$ est bijective (l'identité est bijective)

$f \circ g$ est injective, d'après 4°), g est injective.

$f \circ g$ est surjective, d'après 5°), f est surjective.

c. $f \circ f = Id_E$ est bijective

$f \circ f$ est injective, d'après 4°), f est injective.

$f \circ f$ est surjective, d'après 5°), f est surjective.

Par conséquent f est bijective et $f^{-1} = f$.

Exercice 2-15

On considère l'application $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = n^2$

1. Existe-t-il $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :$f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$?
2. Existe-t-il $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :$h \circ f = Id_{\mathbb{N}}$?

Correction exercice 2-15

1. Supposons que g existe, $f \circ g = Id_{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f(g(n)) = n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (g(n))^2 = n$

   Si n n'est pas un carré cela ne marche pas, par exemple si $n = 2$, $(g(2))^2 = 2$ donc $g(2) = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$

   Il n'existe pas de fonction $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :$f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$.
2. Supposons que h existe, $h \circ f = Id_{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, h(f(n)) = n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, h(n^2) = n$

   Les valeurs $h(p)$ prennent les valeurs qu'elles veulent sauf lorsque p est un carré auquel cas $h(p) = \sqrt{p}$, donnons une fonction h qui répond à la question :

   Si $p \neq n^2$ alors $h(p) = 0$ et si $p = n^2$ alors $h(p) = \sqrt{p} = n$.

Exercice 2-16

1. Soit f l'application de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ dans lui-même définie par :

   $$f(1) = 4,\ \ f(2) = 1\ \ , f(3) = 2,\ \ f(4) = 2.$$

   Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{2\}$, $A = \{1,2\}$, $A = \{3\}$.
2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{1\}$, $A = [1,2]$.

Correction exercice 2-16

1. $f^{-1}(\{2\}) = \{3,4\}; f^{-1}(\{1,2\}) = \{2,3,4\}\ ; f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$
2.

$$f^{-1}(\{1\}) = \{-1,1\}$$
$$f^{-1}([1,2]) = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$$

Exercice 2-18

Soit f une application de E vers E telle que :

$$f(f(E)) = E$$

Montrer que f est surjective.

Correction exercice 2-18

$f(E) \subset E$ donc $f(f(E)) \subset f(E) \subset E$, or $f(f(E)) = E$ donc $E \subset f(E) \subset E$, par conséquent $E = f(E)$ ce qui signifie que f est surjective.

Exercice 2-102

Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$, deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f: I \to J$ une fonction strictement croissante.

1. Montrer que f est injective.

On pourra montrer la contraposée (et on rappelle que $x_1 \neq x_2$ équivaut à $x_1 < x_2$ ou $x_2 < x_1$)

2. Déterminer l'ensemble K tel que $f: I \to K$ soit bijective.

Correction exercice 2-102

1.

Si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$ donc $f(x_1) \neq f(x_2)$

Si $x_1 > x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$ donc $f(x_1) \neq f(x_2)$

Donc f est injective.

2. $K = f(I)$

Exercice 2-106

Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F .

1. Montrer que pour toute partie A de E, on a $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.
2. Montrer que pour toute partie B de F, on a $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.
3. Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E on a $A = f^{-1}\big(f(A)\big)$.
4. Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F on a $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.

Correction 2-106

1. Pour tout $x \in A$, $f(x) \in f(A)$ et donc $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$, ce qui montre que $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$
2. Pour tout $y \in f\big(f^{-1}(B)\big)$, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$, comme $x \in f^{-1}(B)$ $f(x) \in B$ ce qui entraine que $y \in B$, ce qui montre que $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.
3. Comme « pour toute partie A de E, on a $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$ » la question revient à montrer que :
   « f est injective si et seulement si pour toute partie A de E on a $A \supset f^{-1}\big(f(A)\big)$ »
   Si f est injective.
   Pour tout $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$, $f(x) \in f(A)$ ce qui signifie qu'il existe $x' \in A$ (attention, à priori ce n'est pas le même x que celui du début de la phrase) tel que $f(x) = f(x')$ comme f est injective $x = x'$, par conséquent $x \in A$.
   On a montré que $f^{-1}\big(f(A)\big) \subset A$.
   Si pour toute partie $A \subset E$, $f^{-1}\big(f(A)\big) \subset A$
   $$f(x_1) = f(x_2) = y$$
   On prend $A = \{x_1\}$
   $$f(A) = f(\{x_1\}) = \{f(x_1)\} = \{y\} \Rightarrow f^{-1}\big(f(A)\big) = f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(y)$$
   D'après l'hypothèse $f^{-1}\big(f(A)\big) \subset A$ donc $\{f^{-1}(y)\} \subset \{x_1\}$
   Or $x_2 \in f^{-1}(y)$ car $f(x_2) = y$ donc $x_2 \in \{x_1\}$ par conséquent $x_1 = x_2$ ce qui signifie que f est injective.
   Finalement on a montré l'équivalence demandée.
4. Comme « pour toute partie B de F, on a $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$ » la question revient à montrer que :
   « f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F on a $f\big(f^{-1}(B)\big) \supset B$ »
   Si f est surjective.
   Pour tout $y \in B$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car f est surjective.
   $x \in f^{-1}(B)$ entraine que $y = f(x) \in f\big(f^{-1}(B)\big)$, cela montre que $B \subset f\big(f^{-1}(B)\big)$.
   Si pour tout $B \subset f\big(f^{-1}(B)\big)$
   On pose $B = \{y\}$, alors $\{y\} \subset f\big(f^{-1}(\{y\})\big)$ ce qui s'écrit aussi $y \in f\big(f^{-1}(\{y\})\big)$, il existe donc $x \in f^{-1}(\{y\})$ tel que $y = f(x)$, cela montre bien que f est surjective.
   Finalement on a montré l'équivalence demandée.