Feuille 5 : Nombres complexes

Exercice 5-1. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

a) $z = 4 + 5i$, b) $z = (-2 + 2i) + (5 + 3i)$, c) $z = (-3 - 7i)(1 - 2i)$,

d) $z = (4 + 5i)(5 + 3i)(1 - 2i)$, e) $z = \dfrac{4 - 3i}{5 + 2i}$, f) $z = \dfrac{(4 - 3i)(1 - 2i)}{7 - 3i}$,

g) $z = \dfrac{(7 + 6i)(-3 - 2i)}{2 + i} + 4 + 6i$.

Exercice 5-2. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $z = \dfrac{1 + im}{2m + i(m^2 - 1)}$ pour $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 5-3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer le conjugué des nombres complexes suivants en fonction de $Re(z)$ et $Im(z)$:

a) $z + 1$, b) $z^2 + 3i$, c) $\bar{z} + 2z$, d) $\bar{z} + z - i$,

e) $z^3 + 1$, f) $iz^2 - 3\bar{z}$, g) $z - \bar{z} + iz$, h) $z^2 - i\bar{z} + 4$.

Exercice 5-4.

1. Calculer le module des nombres complexes suivants :

   a) $z = 2 + 5i$, b) $z = -3 + 2i$, c) $z = (3 - 2i)(9 + i)$, d) $z = \dfrac{2 + 5i}{5 - 2i}$.

2. Exprimer le module des nombres complexes suivants à l'aide du module de z :

   a) $z\bar{z}$, b) $2z^2$, c) $\dfrac{2}{\bar{z}}$, d) $3\dfrac{\bar{z}^2}{z}$.

Exercice 5-5. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Établir la relation $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$ et en donner une interprétation géométrique.

Exercice 5-6.

1. Représenter les points d'affixes suivantes dans le plan $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

   a) $z = 1 - i$, b) $\bar{z}$, c) $z + \bar{z}$, d) $z - \bar{z}$.

2. Représenter les vecteurs suivants dans le plan $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

   a) $\overrightarrow{v}$ d'affixe $2 + i$, b) $\overrightarrow{w}$ d'affixe $-3 + 2i$, c) $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$, d) $2\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$.

Exercice 5-7. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

a) $|1 - z| \leq \dfrac{1}{2}$ b) $\mathrm{Re}(1 - z) \leq \dfrac{1}{2}$ c) $\mathrm{Re}(iz) \leq \dfrac{1}{2}$ d) $\left|1 - \dfrac{1}{z}\right|^2 = 2$ e) $\left|\dfrac{z - 3}{z + 3}\right| < 2$

Exercice 5-8. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$, puis $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$.
2. Linéariser $\sin^4(x)$ puis $\cos(x)\sin^4(x)$.

Exercice 5-9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \text{ et } V_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

Exercice 5-10.

1. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

   a) $u = -3$, b) $v = 1 - i$, c) $w = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}$, d) $z = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$.

2. En déduire le module et un argument de uw et $\dfrac{z}{v}$.

Exercice 5-11. Soit $z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

1. Calculer z^2, déterminer le module et un argument de z^2 et écrire z^2 sous forme trigonométrique.
2. En déduire le module et un argument de z.
3. En déduire une expression de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 5-12.

1. Donner la forme trigonométrique de $(1 + i)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (utiliser la formule de Moivre).
2. En déduire une expression très simple de $(1 + i)^n + (1 - i)^n$.

Exercice 5-13. Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe exactement n nombres complexes w vérifiant $w^n = z$. Ces nombres sont appelés les n racines n-ième de z.

1. Représenter dans le plan complexe les 6 racines 6-ième de 1 et les 4 racines 4-ième de -1.
2. Soit $n \geq 2$ un entier. Déterminer les $n - 1$ racines du polynôme complexe $1 + z + z^2 + ... + z^{n-1}$.

Exercice 5-14.

1. Déterminer les racines cubiques de 1 et les représenter dans le plan complexe.
2. On note $j = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.
3. Exprimer les racines cubiques de 1 en fonction de j.

Exercice 5-15.

1. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

   a) $z = 7 + 24i$, b) $z = 9 + 40i$, c) $z = 1 + i$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

   a) $z^2 = -2\sqrt{3} + 2i$, b) $z^2 = 3 - 4i$.

Exercice 5-16. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $iz^2 + (1 - 5i)z - 2 + 6i = 0$, b) $(1 + 2i)z^2 - (9 + 3i)z + 10 - 5i = 0$,

c) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$. d) $z^3 + 3z - 2i = 0$,

e) $z^6 - (3 + 2i)z^3 + 2 + 2i = 0$, f) $\bar{z}^7 = \dfrac{1}{z^2}$

g) $z^5 - z = 0$, h) $27(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0$.

Exercice 5-17.

1. Donner les applications de $\mathbb{C}$ qui représentent les transformations du plan suivantes.

   a) La translation du vecteur d'affixe $-2 + i$.

   b) L'homothétie de rapport 3 et de centre $1 + 2i$.

   c) La rotation d'angle $\pi/6$ et de centre 1.

   d) La symétrie centrale du centre i.

2. Identifier les transformations suivantes dans le plan complexe .

   a) $f_1 : z \mapsto z + 3 - 2i$. b) $f_2 : z \mapsto e^{i\frac{2\pi}{7}} z$. c) $f_3 : z \mapsto e^{i\frac{2\pi}{3}} z - 1$. d) $f_4 : z \mapsto 3z - 5 + i$.

Exercice 5-18. Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| < 1$.

1. Montrer que $|z+c| \leq |1+\bar{c}z|$ si et seulement si $|z| \leq 1$.
2. On notera $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ le disque unité et $C = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ le cercle unité. Montrer que l'application
$$f: \begin{array}{ccc} D & \to & D \\ z & \mapsto & \dfrac{z+c}{1+\bar{c}z} \end{array}$$
est une bijection pour laquelle $f(C) = C$.

Exercice 5-101. Soit $f : x \mapsto \dfrac{z^2-1}{z(z+3)}$ définie sur $\mathbb{C}\backslash\{-3, 0\}$. Calculer $f(1-i)$et $f(1+i)$.

Exercice 5-102. Soit $z = \dfrac{3}{\sqrt{3}+i}$. Calculer z^4.

Exercice 5-103.

1. Calculer $\cos^2(x)\sin^3(x)$ en fonction de $\sin(x)$.
2. Linéariser $\cos^4(x)$.

Exercice 5-104.

1. Donner les solutions complexes de $z^4 = 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^8 + \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z^4 - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Exercice 5-105.

1. Déterminer les quatre nombres complexes a, b, c et d différents de 1 qui sont solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^5 = 1$.
2. Montrer que pour tout nombre complexe z, on a $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = (z-a)(z-b)(z-c)(z-d)$.

Exercice 5-106. Déterminer l'ensemble des racines n-ièmes des nombres complexes suivants :

a) $z = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ pour $n = 3$, b) $z = e^{i\frac{\pi}{5}}$ pour $n = 4$, c) $z = -1$ pour $n = 5$.

Exercice 5-107. Sachant qu'elle admet une racine réelle, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :
$$z^3 + (1-3i)z^2 - (6-i)z + 10i = 0$$

Exercice 5-108. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\dfrac{1}{2}z^6 + (1+3i)z^3 + 8 + 8i = 0$.

Exercice 5-109. On considère l'équation suivante :
$$z^4 - 3z^3 + (2-i)z^2 + 3z - 3 + i = 0 \tag{E}$$

1. Montrer que l'équation (E) admet 2 solutions réelles.
2. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$

Exercice 5-110. On considère la fonction f suivante :
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z(1-z) \end{array}$$

1. Déterminer les points fixes de f, c'est à dire résoudre $f(z) = z$.
2. Montrer que si $\left|z - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{2}$, alors $\left|f(z) - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{2}$.

Indication : on pourra remarquer que $z(1-z) = \left(z - \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2} - z\right) + \dfrac{1}{4}$.