Université Claude Bernard Lyon 1 - automne 2013

Licence Sciences, Technologies, Santé - mention mathématiques

UE Algèbre V Fiche 2

Exercice 1. **a**. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $\sigma \in S_n$, on définit $\sigma \cdot e_i = e_{\sigma(i)}$. Montrer que cette définition donne une action de groupe.

b. Donner une description de la matrice associée à l'application linéaire L_σ qui est l'extension linéaire de σ.

c. En utilisant le théorème de Cayley, déduire que chaque groupe fini est isomorphe à un groupe de matrices.

d. Donner des répresentations explicites de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ comme groupes de permutations et comme groupe de matrices.

Exercice 2. Soient m et n deux entiers ≥ 1.

a. Montrer que le groupe $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z}$ est le groupe $d\mathbb{Z}$ où d est le PGCD de m et n.

b. Montrer que le groupe $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$ est le groupe $l\mathbb{Z}$ où l est le PPCM de m et n.

c. En déduire que $d\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq n\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ et que $\mathrm{PGCD}(m,n)\,\mathrm{PPCM}(m,n) = mn$.

Exercice 3. On considère le groupe S_4 des permutations sur $\{1,2,3,4\}$. Soit H le sous-groupe engendré par les permutations $(1,2)(3,4)$ et $(1,3)(2,4)$.

a. Montrer que H est un sous-groupe distingué de S_4 d'ordre 4.

b. On pose $K = S_4/H$. Montrer que K ne possède pas d'élément d'ordre 6. En déduire que K est isomorphe à S_3.

c. Montrer que H est un sous-groupe distingué de A_4. Calculer A_4/H.

d. Vérifier que $(S_4/H)/(A_4/H) \simeq S_4/A_4$.

Exercice 4. Montrer que les opérations suivantes sont des actions du groupe G sur l'ensemble X. Déterminer les orbites et stabilisateurs des éléments.

a. $G = S_3$, $X = \{T \subseteq \{1,2,3\}\}$ et $\sigma \cdot T = \{\sigma(t) : t \in T\}$.

b. $G = S_3$, $X = A_3$ et $g \cdot x = gxg^{-1}$.

c. $G = A_3$, $X = A_3$ et $g \cdot x = gxg^{-1}$.

d. $G =$ rotations qui stabilisent un cube avec la composition de fonctions, $X =$ faces du même cube, $g \cdot x =$ l'image de la face sous la rotation.

e. Soit $n \in \mathbb{N}$, $G = \left\{ e^{\frac{2\pi i k}{n}} : k \in \mathbb{Z} \right\}$ avec la multiplication, $X = \mathbb{C}$ et $g \cdot x = gx$, la multiplication.

f. $G = GL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $X = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{smallmatrix}\right) \right\}$ et $g \cdot x$ est l'application d'une matrice à un vecteur.

Exercice 5. Soit G un groupe fini d'ordre n divisible par p premier. Soit E le sous-ensemble de G^p défini par : $E = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in G^p \mid x_1 x_2 \ldots x_p = e\}$.

Pour tout élément $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in E$, on pose $\sigma(\xi) = (x_2, x_3, \ldots, x_p, x_1)$.

a. Vérifier que σ est une permutation de E

On définit une action du groupe cyclique $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur E par $\bar{k}\xi = \sigma^k(\xi)$.

b. Quel est le nombre d'éléments de E ?

c. Montrer qu'une orbite contient un seul élément ξ si et seulement si $\xi = (x, \ldots, x)$ avec $x^p = e$.

d. Montrer que le nombre d'orbites réduites à un élément est non nul.

e. En déduire le théorème de Cauchy : si l'ordre de G est divisible par p, alors G contient au moins un élément d'ordre p.

Exercice 6. Rappelons que pour p un nombre premier, on appelle p-groupe un groupe dont l'ordre est une puissance de p. Le but de cet exercice est de démontrer que le centre d'un p-groupe n'est pas réduit à l'élément neutre.

a. Soit G un p-groupe opérant sur un ensemble X, notons X^G l'ensemble des points fixes de X sous G, c'est-à-dire $X^G = \{x \in X \text{ tel que } g \cdot x = x \text{ pour tout } g \in G\}$.

Montrer que :

$$|X| \equiv |X^G| \pmod{p}.$$

Indication : Écrire X comme réunion disjointe de ses orbites sous l'action de G.

b. Conclure : présenter le centre du groupe comme les points fixes sous une action convenable de G. (Préciser l'action et l'ensemble sur lequel G agit).

Exercice 7. Soit G un groupe fini, $Z(G)$ son centre. On fait agir G sur lui-même par conjugaison.

a. On suppose G non commutatif. Soit x un élément de G non dans $Z(G)$ et S_x le stabilisateur de x. Montrer que $Z(G) \subsetneq S_x \subsetneq G$.

b. En déduire que si G n'est pas commutatif, $Z(G)$ est un sous-groupe de G dont l'indice est strictement supérieur au plus petit nombre premier divisant $|G|$, l'ordre de G.

c. Quel est le centre d'un groupe d'ordre p^2, et d'un groupe non commutatif d'ordre p^3 ?

d. Montrer que si G est d'ordre p^2, on a $G \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

e. Donner un exemple de groupe non commutatif d'ordre p^3.