Université Claude Bernard Lyon 1 - automne 2013
Licence Sciences, Technologies, Santé - mention mathématiques

UE Algèbre V Fiche 3

Exercice 1. Soit G un groupe abelien et $H = \{x \in G : \mathrm{ord}(x) \text{ est fini}\}$.
Montrer que H est un sous-groupe de G.

Exercice 2. Soit G un groupe d'ordre $2q$ avec q premier, $q \geq 3$.
Soit $N \trianglelefteq G$ un sous-groupe distingué d'ordre 2.
Montrer que G est cyclique.

Exercice 3. Soit G un groupe fini et $x, y \in G$ avec $\mathrm{ord}(x) = 3$ et $\mathrm{ord}(y) = 5$.
Peut-on avoir $\mathrm{ord}(xy) \neq 15$?

Exercice 4. Soit G un groupe et $a, b \in G$ avec $a^2 = e$ et $a^{-1}b^2a = b^3$.
Montrer que $b^5 = e$.

Exercice 5. Soit G un groupe fini.
Montrer que $|G|$ est impair $\Leftrightarrow \forall x\ \exists y : x = y^2$.

Exercice 6. Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Aut}(\mathrm{S}_3)$.
(Indication : utiliser le fait que chaque groupe contient exactement trois éléments d'ordre 2.)

Exercice 7. **a**. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $S_n \simeq A_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

b. Montrer que, pour tout $n \geq 3$, on a $S_n \not\simeq A_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

c. Pour $n = 3$, montrer que $A_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Exercice 8. Soit D_4 le groupe diédral à 8 éléments, c'est-à-dire le groupe engendré par a et b avec

$$a^4 = b^2 = e \quad \text{et} \quad bab = a^{-1}$$

et dont les éléments sont $\{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$.

a. Soit $H = \langle a \rangle$ et $K = \langle b \rangle$. Montrer que $D_4 = H \rtimes K$.
En déduire que $D_4 \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

b. Soit $H = \langle a^2, b \rangle$ et $K = \langle ab \rangle$. Montrer que $D_4 = H \rtimes K$.
En déduire que $D_4 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 9. Soit Q le groupe des quaternions. C'est-à-dire le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Montrer que chaque sous-groupe non trivial de Q contient le centre de Q.
En déduire qu'on ne peut écrire Q comme produit semi-direct de deux sous-groupes non triviaux.

Exercice 10. Soit p un nombre premier et a un nombre entier. On regarde l'ensemble des collier à p perles qui peuvent avoir a couleurs différentes. On considère des colliers égaux s'ils diffèrent par une rotation.

Combien y a-t-il de colliers ?

Exercice 11. On veut colorier les faces d'un cube avec les deux couleurs : rouge et bleu. On ne peut pas distinguer deux coloriages qui diffèrent par une rotation.

Combien y a-t-il de coloriages ?

Exercice 12. Un graphe $G(V, E)$ est un ensemble V de sommets avec un ensemble E d'arêtes où chaque arête est un sous-ensemble de cardinal 2 de E. Deux graphes sont isomorphes s'il y a une bijection entre leur sommets qui donne aussi une bijection sur les arêtes.

Compter le nombre des graphes non-isomorphes à 4 sommets.