Université Claude Bernard Lyon 1 - automne 2012

Licence Sciences, Technologies, Santé - mention mathématiques

UE Algèbre V Fiche 4 (part 1)

Exercice 1. Soient G et H deux groupes finis tels que G est isomorphe à un sous-groupe de H et H est isomorphe à un sous-groupe de G. Montrer que $G \simeq H$.

Exercice 2.

1. Soit G le groupe formé des suites infinies $(a_1, a_2, \dots)$ d'éléments de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ avec pour opération l'addition coordonnée par coordonnée. Montrer que $G \simeq G \times G$.
2. Soit $H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times G$. Montrer que H est isomorphe à un sous-groupe de G et que G est isomorphe à un sous-groupe de H.
   Soit $x \in G$ tel que $2x = e_G$. Montrer qu'il existe $y \in G$ tel que $2y = x$.
   En déduire que G et H ne sont pas isomorphes.

Exercice 3. Soit G le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ avec $n \geq 1$ et p premier.

1. Montrer que, pour deux bases données de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$, il existe une unique matrice dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ de changement de bases entre ces deux bases.
2. En déduire que
$$|\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = \prod_{i=0}^{n-1}(p^n - p^i) = p^{n(n-1)/2}\prod_{i=0}^{n-1}(p^{n-i} - 1).$$
3. Montrer que les matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale forment un groupe de p-Sylow de G.

Exercice 4. Déterminer le nombre de 3-Sylow et de 5-Sylow de S_5.

Exercice 5. Combien y a-t-il d'éléments d'ordre 7 dans un groupe simple d'ordre 168 ?

Exercice 6. Montrer qu'un groupe d'ordre 200 ne peut être simple.

Exercice 7. Trouver tous les groupes d'ordre 15 à isomorphisme près.

Exercice 8. Soient $p < q < r$ trois nombres premiers. Soit G un groupe d'ordre pqr. On note n_q et n_r de q-Sylow et de r-Sylow de G.

1. Montrer que $n_q(q-1) + n_r(r-1) \leq pqr - 1$.
2. Montrer que $n_r = 1$ ou $n_r = pq$.
3. Montrer que $n_q = 1$ ou $n_q \geq r$.
4. En déduire que $n_q = 1$ ou $n_r = 1$ et donc G n'est pas simple.

Exercice 9. Soit G un groupe fini simple. Soit p un nombre premier divisant l'ordre de G. On note n_p le nombre de p-Sylow de G. Montrer que G est un p-groupe ou $|G|$ divise $n_p!$.

Exercice 10. Le but de cet exercice est de démontrer que 60 est le plus petit ordre d'un groupe simple non abélien.

1. Montrer que si G est d'ordre p^k avec p premier et $k \geq 1$, alors G ne peut pas être non abélien et simple.
2. Montrer que si G est d'ordre $p^k m$ avec p premier, $k \geq 1$ et $m < p$, alors G ne peut pas être non abélien et simple.
3. Soit G un groupe d'ordre $2^p(2^p - 1)$ avec p premier et $q = 2^p - 1$ premier. Montrer que si il a plus d'un q-Sylow dans G, alors le 2-Sylow est unique. (Indication : compter les éléments d'ordre q.)
4. Montrer qu'un groupe d'ordre 40 ou 45 n'est pas simple.
5. Déduire des questions précédentes que si G est un groupe non abélien et simple d'ordre < 60 alors G est d'ordre 24, 30, 36, ou 48. Utiliser les exercices précédents pour montrer qu'un groupe d'ordre 24, 30, 36 ou 48 n'est pas simple.