Université Claude Bernard Lyon 1 - automne 2012

Licence Sciences, Technologies, Santé - mention mathématiques

UE Algèbre V Fiche 4 (part 2)

Exercice 11. Soit G un groupe simple d'ordre 60. Le but de cet exercice est de démontrer G est isomorphe à A_5.

1. Montrer que $n_2 \in \{5, 15\}$, $n_3 = 10$ et $n_5 = 6$ où n_p est le nombre de p-Sylow de G. (Utiliser l'exercice 9.)
2. On suppose que $n_2 = 5$. En utilisant l'action de G sur ses 2-Sylow, montrer que G est isomorphe à A_5.
3. On suppose que $n_2 = 15$.
   (a) Compter les éléments d'ordre 3 et 5 dans G.
   (b) Montrer qu'il existe deux 2-Sylow P et Q de G tels que $R = P \cap Q$ est d'ordre 2.
   (c) Soit H le sous-groupe de G engendré par P et Q. Montrer que H est contenu dans le centralisateur de R.
   (d) En déduire que l'indice de H dans G est 3 ou 5.
   (e) En utilisant l'action de G sur les sous-groupes de G conjugués à H, montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de S_3 ou de S_5.
   (f) En déduire que G est isomorphe à A_5.

Exercice 12. Le but de cet exercice est de montrer que S_6 admet un automorphisme extérieur.

1. Le groupe S_5 agit par conjugaison sur ses 5-Sylow $\langle(12345)\rangle$, $\langle(12435)\rangle$, $\langle(12354)\rangle$, $\langle(12453)\rangle$, $\langle(12534)\rangle$, $\langle(12543)\rangle$. On définit $\phi : S_5 \to S_6$ qui associe à $\sigma \in S_5$ la permutation des 5-Sylow dans l'ordre donnée ci-dessus par la conjugaison par σ.
   (a) Montrer que ϕ est un morphisme des groupes.
   (b) Montrer que $\phi((34)) = (12)(34)(56)$.

   (c) Calculer $\phi((345))$.
   (d) Montrer que ϕ est injective.
   (e) Montrer que $\phi(S_5) = H \simeq S_5$, $H \leq S_6$ et $(S_6 : H) = 6$.

2. Vérifier que S_6 agit de manière transitive sur les classes à gauche modulo H par multiplication à gauche.

3. On définit $f : S_6 \to S_6$ qui associe à chaque élément de S_6 la permutation des classes sous l'action de groupes donné ci-dessus (avec un ordre arbitraire fixé des classes).

   (a) Montrer que f est un morphisme de groupes.
   (b) Montrer que f est injectif et donc un automorphisme de S_6.
   (c) Montrer que $(12)(34)(56)$ fixe la classe H et donc que $f((12)(34)(56))$ n'est pas dans la classe de conjugaison de $(12)(34)(56)$.
   (d) En déduire que f n'est pas un automorphisme intérieur.

Exercice 13. Le but de cet exercice est de montrer que tous les automorphismes de S_n sont intérieurs pour $n \neq 6$.

1. Soit $n \geq 2$. Montrer qu'un automorphisme de S_n qui fixe la classe des transpositions est un automorphisme intérieur.

2. Pour $1 \leq k \leq n/2$, montrer que le nombre des permutations de type 2^k dans S_n est
$$\frac{1}{2^k} \frac{n!}{k!(n-2k)!}.$$

3. Montrer que pour $2 \leq k \leq n/2$, on a
$$k! \leq (n-k) \cdots (n-2k+1)$$
et, si de plus $n \geq 7$ et $k \geq 3$, alors
$$2^{k-1} < (n-2)(n-3) \cdots (n-k+1).$$

4. En déduire que les automorphismes de S_n pour $n \geq 7$ sont intérieurs.

5. Montrer que les automorphismes de S_n pour $n = 2, 3, 4$ et 5 sont intérieurs.