Vérification Numérique des Conjectures “à la Stark”

Au commencement...

Soit $f \geq 1$ et χ caractère primitif modulo f, on pose :

$$L(s,\chi) = \sum_{n \geq 1} \chi(n)\, n^{-s} = \prod_p (1 - \chi(p)\, p^{-s})^{-1}.$$

- Si $f = 1$, $L(s, \mathbf{1})$ est la fonction zêta de Riemann,
- Si $f > 1$, $L(s,\chi)$ est entière et si χ est pair :

$$L'(0,\chi) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,f)=1}}^{f} \log|1 - \zeta^a| \chi(a)$$

où ζ est une racine primitive f-ième de l'unité.

Conjectures à la Stark

Soient K totalement réel et N/K extension abélienne finie de conducteur $\mathfrak{f}$ et de groupe de Galois G, et S ensemble finie de places avec $S_\infty \cup S_{\mathrm{ram}} \subset S$.

$$\left(\begin{array}{c}\text{Valeurs de fonctions transcendantes}\\ \text{associées à } N/K \text{ et à } S\\ \text{en } s=0 \text{ ou } s=1\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{Régulateur}\\ \text{de certaines}\\ S\text{-unités de } N\end{array}\right)$$

- Conjecture de Stark : fonctions L_S de Hecke, une unité
- Conjecture de Rubin : fonctions L_S de Hecke, plusieurs unités
- Conjecture de Solomon : fonctions zêta p-adiques tordues, plusieurs unités

La Conjecture de Stark

On suppose que S_∞ contient une place v totalement décomposée, alors il existe une S-unité $\varepsilon \in N$ telle que :

$$L'_S(0,\chi) = -\frac{1}{m}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\log|\sigma(\varepsilon)|_w$$

où $m = \mathrm{Card}(W_N)$ et w divise v dans N.

Méthode de vérification : on calcule $L'_S(0,\chi)$ et on en déduit le polynôme minimal de ε sur K grâce à la formule :

$$\sigma(\varepsilon) = e^{-m\,\zeta'_S(0,\sigma)}$$

pour tout $\sigma \in G$.

Un exemple

Corps de base		Extension N/K	
$K = \mathbb{Q}(\sqrt{1093})$		Conducteur	$\mathfrak{p}_3 v'$
Discriminant	$d_K = 1093$	avec	$3\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$
Anneau d'entiers	$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$	et	$v'(\sqrt{1093}) < 0$
avec	$\omega = (1+\sqrt{1093})/2$	Groupe de Galois	$G \simeq C_{10}$
Groupe de classes	$\mathrm{Cl}_K \simeq C_5$	Ensemble de places	$S = \{v, v', \mathfrak{p}_3\}$

Alors, les $e^{-2\zeta_S'(0,\sigma)}$ pour $\sigma \in G$ sont racines du polynôme suivant qui définit N :

$$X^{10} + (32\omega - 539)X^9 + (-801\omega + 13659)X^8 + (6575\omega - 111939)X^7 + (-22986\omega + 391509)X^6 + (35264\omega - 600498)X^5 + (-22986\omega + 391509)X^4 + (6575\omega - 111939)X^3 + (-801\omega + 13659)X^2 + (32\omega - 539)X + 1$$

La Conjecture de Rubin : définitions

On suppose que $N = K(\mathfrak{f})$ où $\mathfrak{f}_0 \neq \mathcal{O}_K$.

Soit $\rho = [K:\mathbb{Q}] - \mathrm{Card}(\mathfrak{f}_\infty)$. On choisit $v_1, \ldots, v_\rho \in S_\infty \smallsetminus \mathfrak{f}_\infty$, et on fixe w_j divisant v_j dans N.

Pour $1 \leq j \leq \rho$, on définit :

$$\begin{array}{rcl} \lambda_j \colon N^\times & \longrightarrow & \mathbb{R}[G] \\ \alpha & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\sigma \in G} \log|\sigma(\alpha)|_{w_j} \sigma^{-1} \end{array}$$

et le régulateur :

$$\begin{array}{rrcl} R : & (N^\times)^\rho & \longrightarrow & \mathbb{R}[G] \\ & (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\rho) & \longmapsto & \det\left(\lambda_j(\varepsilon_i)\right)_{i,j} \end{array}$$

La Conjecture de Rubin : énoncé

Il existe $\eta_{\mathfrak{f}} = (\eta_1, \ldots, \eta_\rho) \in \widetilde{\mathcal{U}}_S(N)^\rho$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} c_\chi(\rho)\, e_\chi = \frac{1}{m} R(\eta_{\mathfrak{f}}),$$

où $c_\chi(\rho) = \lim_{s\to 0} s^\rho\, L_S(s,\chi)$. De plus, m est divisible uniquement par les nombres premiers qui divisent $|G|$.

Méthode de vérification : On calcule $u_1, \ldots, u_\rho$ engendrant un sous-$\mathbb{Z}[G]$-module d'indice fini dans $\widetilde{\mathcal{U}}_S(N)$, puis on cherche $A \in \mathbb{Q}[G]$ tel que :

$$\textstyle\sum_{\chi \in \widehat{G}} c_\chi(\rho)\, e_\chi = A \cdot R(u_1, \ldots, u_\rho)$$

grâce à l'identification $\mathbb{C}[G] \simeq \mathbb{C}^{|G|}$.

Un exemple

Corps de base		Extension N/K	
	$K = \mathbb{Q}(\alpha)$	Conducteur	$\mathfrak{P}_3\,\mathfrak{p}_5$
avec	$\alpha^3 + \alpha^2 - 14\alpha - 23 = 0$	avec	$3\mathcal{O}_K = \mathfrak{P}_3\,\mathfrak{p}_3$
Discriminant	$d_K = 2777$	et	$5\mathcal{O}_K = \mathfrak{P}_5\,\mathfrak{p}_5$
Anneau d'entiers	$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$	Groupe de Galois	$G = \langle \sigma, \tau \rangle \simeq C_2 \times C_2$
Groupe de classes	$\mathrm{Cl}_K \simeq C_2$	Ensemble de places	$S = \{v_1, v_2, v_3, \mathfrak{P}_3, \mathfrak{p}_5\}$

On calcule :

$$\sum_\chi c_\chi(\rho)\, e_\chi = 21.4788165854 - 7.00241320533\,\sigma - 19.9594298835\,\tau + 5.48302650343\,\sigma\tau.$$

Puis, on calcule pour u_1, u_2, u_3 tels que $(\widetilde{\mathcal{U}}_S(N) \colon \langle u_1, u_2, u_3 \rangle_{\mathbb{Z}[G]}) = 16$:

$$R(u_1, u_2, u_3) = 24.6405333239 - 53.5933400842\,\sigma - 0.33034609358\,\tau + 29.2831528538\,\sigma\tau.$$

Finalement, on trouve que $\sum_\chi c_\chi(\rho)\, e_\chi = A \cdot R(u_1, u_2, u_3)$ pour :

$$A = -0.218750000 - 0.500000000\,\sigma - 0.218750000\,\tau = \frac{1}{32}\left(-7 - 16\,\sigma - 7\,\tau\right).$$

La Conjecture de Solomon : définitions

On suppose que $h_K^+ = 1$, $\mathfrak{f}_0 \neq \mathcal{O}_K$ et $\mathfrak{f}_\infty = S_\infty$.

On pose $N^+ = K(\mathfrak{f})$, $N = K(\mathfrak{f}_0)$, $S = S_\infty \cup \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}_0\}$ et $G^+ = \mathrm{Gal}(N^+/K)$.

On fixe un nombre premier impair p premier avec $\mathfrak{f}_0$ et on pose $T = \{\mathfrak{q} \mid p\}$.

On pose $\mathcal{W}_\mathfrak{f} = \{\xi \colon \mathcal{O}_K \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ tels que $\mathrm{cond}(\xi) = \mathfrak{f}_0\}/\sim$

où $\xi \sim \xi'$ si il existe $\eta \in \mathcal{U}^+(K)$ tel que $\xi'(\alpha) = \xi(\eta\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathcal{O}_K$.

On a alors :

$$\mathcal{W}_\mathfrak{f} \cong \mathrm{Cl}_\mathfrak{f}(K) \cong G^+.$$

Pour $\sigma \in G^+$, on définit $Z_p(s, \xi_\sigma)$ par interpolation p-adique de :

$$\sum_{\overline{\alpha}} \xi_\sigma(\alpha)\mathcal{N}\alpha^{-s} \quad \text{avec} \quad \overline{\alpha} \in \mathcal{O}_{K,(p)}^+/(\mathcal{U}(K) \cap P_\mathfrak{f}(K)).$$

La Conjecture de Solomon : énoncé

Si on note :

$$\Psi_{\mathfrak{f},p} = \mathrm{Im}_{\overline{\mathbb{Q}}_p[G^+] \twoheadrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p[G]} \left[\sum_{\sigma \in G^+} Z_p(1, \xi_\sigma) \sigma^{-1} \right].$$

Alors, il existe $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \widetilde{\mathcal{U}}_{S,T}(N)$ telles que :

$$\Psi_{\mathfrak{f},p} = \frac{\pm 2^n}{p^n \sqrt{d_K}} \det \left(\sum_{\sigma \in G} \log_{p,j}(\sigma \varepsilon_i)\, \sigma^{-1} \right)_{i,j}$$

où $\log_{p,j} = \log_p \circ \iota_j$ avec ι_j plongement de N dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$.

Méthode de vérification : On se restreint à K quadratique réel. On utilise la méthode de Shintani et la correspondance entre (certaines) séries entières à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et mesures p-adiques pour calculer $Z_p(1, \xi_\sigma)$.

Un exemple

Corps de base		Extension N/K	
$K=\mathbb{Q}(\sqrt{37})$		$p=3$ et $T=\{\mathfrak{q}_3,\mathfrak{q}_3'\}$	
Discriminant	$d_K=37$	Conducteur	$2\mathcal{O}_K$
Anneau d'entiers	$\mathcal{O}_K=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega$	Groupe de Galois	$G=\langle\sigma\rangle\simeq C_3$
avec	$\omega=(1+\sqrt{37})/2$	Ensemble de places	$S=\{v_1,v_2,2\mathcal{O}_K\}$

Notons que $N^+=N$. On calcule :

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathfrak{f},p}= \quad & (2\cdot 3^2+3^3+3^4+2\cdot 3^5+2\cdot 3^6+2\cdot 3^7+2\cdot 3^8+2\cdot 3^9+3^{10})(1+\sigma) \\ & +(2+2\cdot 3^2+2\cdot 3^4+3^5+2\cdot 3^6+2\cdot 3^7+2\cdot 3^8)\sigma^2+O(3^{11}).\end{aligned}$$

Puis, on calcule pour u_1,u_2 tels que $(\widetilde{\mathcal{U}}_{S,T}(N)\colon\langle u_1,u_2\rangle_{\mathbb{Z}[G]})=4$:

$$\begin{aligned}R(u_1,u_2)= \quad & (2\cdot 3^3+3^5+3^6+2\cdot 3^7+2\cdot 3^8+2\cdot 3^9+2\cdot 3^{10})\,(1+\sigma^2) \\ & +(2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+3^4+2\cdot 3^6+2\cdot 3^7+3^8)\,\sigma+O(3^{11}).\end{aligned}$$

Finalement, on trouve que $\Psi_{\mathfrak{f},p} = A \cdot 4(9\sqrt{37})^{-1} R(u_1, u_2)$ pour :

$$\begin{aligned} A &= (2\cdot 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8 + 3^9 + 3^{10})(1+\sigma) \\ &\qquad +(1 + 3 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + 2\cdot 3^4 + 2\cdot 3^5 \\ &\qquad\quad +2\cdot 3^6 + 2\cdot 3^7 + 2\cdot 3^8 + 2\cdot 3^9 + 2\cdot 3^{10})\sigma^2 + O(3^{11}) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(3 + 3\,\sigma - 10\,\sigma^2\right) = -\tfrac{1}{2}\,\sigma^2\,(\sigma - 3)\left(\sigma^2 - 3\right). \end{aligned}$$

On écrit :

$$A = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\left(1 - 3\sigma - 4\sigma^2\right) & \frac{1}{2}\left(2 - 3\sigma - 11\sigma^2\right) \\ \sigma^2 - 3 & \sigma^2 - 3 \end{vmatrix},$$

et on pose $\varepsilon_1 = \sqrt{u_1^{1-3\sigma-4\sigma^2}\, u_2^{2-3\sigma-11\sigma^2}}$ et $\varepsilon_2 = (u_1 u_2)^{\sigma^2-3}$.

Alors, ce sont des éléments de $\widetilde{\mathcal{U}}_{S,T}(K)$, et :

$$\Psi_{\mathfrak{f},p} = \frac{4}{9\sqrt{37}}\, R(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$