Théorie des Nombres

Unités de Stark et corps de classes de Hilbert

Xavier-François Roblot

Résumé. Suivant l'idée originale de Stark selon laquelle ses conjectures sont une réponse partielle au XII-ième problème de Hilbert, on montre comment ces conjectures permettent de construire le corps de classes de Hilbert d'un corps totalement réel à l'aide de calculs approchés des dérivées de certaines fonctions L d'Artin.

Stark units and Hilbert class fields

Abstract. Following Stark original idea, we describe how one can use his conjectures to construct the Hilbert Class field of totally real fields by computing accurate approximations of the first derivative of some Artin L-functions.

I. Conjectures de Stark

Soient K/k une extension abélienne de corps de nombres, $\mathfrak{f}$ le conducteur de cette extension et G son groupe de Galois ; on suppose qu'au moins une place infinie de k est totalement décomposée dans K/k. A tout élément σ de G est associée la fonction zêta partielle définie pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ par :

$$\zeta(s,\sigma) = \sum_{\substack{(\mathfrak{a},\mathfrak{f})=1 \\ \sigma_{\mathfrak{a}}=\sigma}} \mathcal{N}\mathfrak{a}^{-s},$$

où $\mathfrak{a}$ parcourt les idéaux entiers de k premiers avec $\mathfrak{f}$ dont le symbole d'Artin $\sigma_{\mathfrak{a}}$ vaut σ.

Pour un caractère χ de G, on définit une fonction L d'Artin au moyen du produit eulérien pour $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$L(s,\chi) = \prod_{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{f}} (1 - \chi(\sigma_{\mathfrak{p}})\mathcal{N}\mathfrak{p}^{-s})^{-1}$$

où $\mathfrak{p}$ parcourt les idéaux premiers de k ne divisant pas $\mathfrak{f}$.

Ces fonctions admettent des prolongements méromorphes au plan complexe (et même holomorphes pour la fonction L si le caractère χ est non trivial) et sont liées par la relation :

$$\zeta(s,\sigma) = \frac{1}{[K:k]} \sum_{\chi\in\hat{G}} L(s,\chi)\bar{\chi}(\sigma).$$

Pour un caractère χ de G, on pose $s(\chi)$ le nombre de places infinies de k et de places finies ramifiées dont la restriction de χ au groupe de décomposition est triviale. L'ordre $r(\chi)$ du zéro de $L(s,\chi)$ en $s = 0$ est $r(\chi) = s(\chi) - 1$ si χ est le caractère trivial, sinon $r(\chi) = s(\chi)$.

Soient v une place infinie de k totalement décomposée et w une place fixée de K au-dessus de v.

Conjecture de Stark. *Il existe une unité ε de K telle que* $\log|\varepsilon^\sigma|_w = -e\zeta'(0,\sigma)$ *pour tout* $\sigma \in G$*, ou de manière équivalente :*

$$L'(0,\chi) = -\frac{1}{e}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\log|\varepsilon^\sigma|_w$$

où e est le nombre de racines de l'unité contenues dans K. (Cette unité n'est définie qu'à la multiplication par une racine de l'unité contenue dans K près.) De plus, l'extension $K(\sqrt[e]{\varepsilon})/k$ pour une unité ε vérifiant la condition précédente est abélienne, et ainsi ne dépend pas du choix de ε.

Un énoncé plus complet des conjectures de Stark se trouve dans le livre de Tate [6].

Le but de cette méthode étant d'utiliser les unités de Stark dans la construction du corps de classes de Hilbert d'un corps totalement réel (suivant l'exemple original donné dans [5]), on admet dans la suite la validité de cette conjecture et on vérifie ensuite cas par cas que l'unité utilisée pour cette construction possède toutes les propriétés décrites. Les résultats suivants sont démontrés *sous l'hypothèse que la conjecture énoncée ci-dessus est valide.*

II. Applications aux corps totalement réels

Soient k un corps totalement réel de degré $N \geq 3$ (†) et d_k son discriminant. On note $v_1, \ldots, v_N$ les plongements de k et, par extension, les places infinies associées de k.

Soit η un entier de $\mathcal{O}_k$, anneau des entiers de k, tel que $v_1(\eta) > 0$ et $v_i(\eta) < 0$ pour $2 \leq i \leq n$; η n'est pas un carré dans $\mathcal{O}_k$. On note $k' = k(\sqrt{\eta})$; la signature de k' est $(2, N-1)$ et toutes les places de k, sauf v_1, se ramifient dans k'. Soit $\mathfrak{f}_0$ le discriminant relatif de l'extension k'/k ; $\mathfrak{f}_0$ est produit d'idéaux premiers distincts sauf, éventuellement, pour les idéaux premiers au-dessus de 2. On note $\mathfrak{f}_\infty = v_2 \ldots v_N$; le conducteur de k'/k est alors $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_0\mathfrak{f}_\infty$.

Soit $K = H(\sqrt{\eta})$, où H est le corps de classes de Hilbert de k ; K est une extension abélienne de k de conducteur $\mathfrak{f}$. Soit ε l'unité de Stark associée à K/k et à w place infinie fixée de K au-dessus de v_1 telle que $w(\varepsilon) > 0$ (cette unité est supposée exister - cf. ci-dessus) ; les seules racines de l'unité contenues dans K étant ± 1, la condition imposée assure l'unicité de cette unité.

Proposition. *L'unité ε engendre K sur k, et même sur* $\mathbf{Q}$ *.*

On peut à présent énoncer le résultat principal de ce paragraphe :

Théorème. *Il existe un élément $\alpha \in H$ tel que, pour tout $\sigma \in$* $\mathrm{Gal}(H/k)$*, on a $\alpha^\sigma = \varepsilon^{\sigma^*} + 1/\varepsilon^{\sigma^*}$, où σ^* est un prolongement arbitraire de σ à G. De plus, α est un générateur de* $H/\mathbf{Q}$ *.*

III. Méthode de calcul explicite

Soient k un corps totalement réel de degré ≥ 3 et K défini comme dans la section précédente. On a un isomorphisme $G \cong <\tau> \times \mathcal{H}$ où τ est l'automorphisme non trivial de l'extension quadratique K/H et $\mathcal{H} = \mathrm{Gal}(H/k)$.

Soit χ un caractère de G ; on écrit $\chi = \chi_0\chi_1$ où χ_0 est un caractère de $<\tau>$ et χ_1 un caractère de $\mathrm{Gal}(H/k)$. On considère pour le calcul de $L'(0,\chi)$ deux cas, suivant que χ_0 est trivial ou non.

(†) dans un but de simplification, on écarte le cas où k est un corps quadratique.

Si χ_0 est trivial, le corps fixe de χ est H, son conducteur est $\mathcal{O}_k$ et il s'ensuit que $L'(0,\chi)=0$. Sinon, posons $C=\sqrt{d_k\mathcal{N}\mathfrak{f}_0/\pi^N}$ et $\Lambda(s,\chi)=C^s\Gamma(s/2)\Gamma(\frac{s+1}{2})^{N-1}L(s,\chi)$. La fonction Λ vérifie l'équation fonctionnelle $\Lambda(1-s,\chi)=W(\chi)\Lambda(s,\bar{\chi})$, où $W(\chi)$ est un nombre complexe de module 1 appelé *"Artin Root Number"*. Le calcul de ce nombre est un des problèmes principaux de cette méthode et s'effectue par des considérations locales (voir [4] pour une définition complète).

En faisant tendre s vers 0, on trouve que $\lim_{s\to 0}\Lambda(s,\bar{\chi})=2\pi^{(N-1)/2}L'(0,\bar{\chi})$ car la fonction Γ admet un pôle simple en $s=0$ de résidu 1. On a donc prouvé que :

$$L'(0,\chi)=\frac{\Lambda(1,\bar{\chi})}{2\pi^{\frac{N-1}{2}}W(\bar{\chi})}.$$

Le calcul de la fonction Λ en $s=1$ se fait en généralisant la méthode de Friedman expliquée dans [3] et developpée par Tollis [7].

Une fois déterminées des valeurs approchées de $\Lambda(1,\chi)$ pour tout χ, on en déduit des valeurs approchées des conjugués de ε, puis de α sur k. Il faut remarquer que quand on ôte la valeur absolue dans la formule définissant les conjugués de ε, un signe reste à determiner ; en fait, on a fixé ce signe en choisissant ε tel que $w(\varepsilon)>0$, et dans ce cas, on démontre que tous les conjugués de ε sur k sont positifs (ceci est une conséquence du fait que $K(\sqrt{\varepsilon})/k$ est abélien). On peut alors former le polynôme réel dont les racines sont les approximations des conjugués de α obtenus : on obtient des approximations en v_1 des coefficients de ce polynôme. Pour pouvoir identifier ces coefficients, on a besoin de savoir ce qui se passe en les autres places de K.

Lemme. *Soit w' une place de K qui ne divise pas v_1 (elle est donc complexe). Alors on a $|\varepsilon|_{w'}=1$.*

Grâce à ce lemme, on peut borner les plongements en toutes les places des coefficients du polynôme irréductible de α sur k. On obtient un nombre fini d'entiers algébriques susceptibles d'être un coefficient donné de ce polynôme. Le plus souvent une précision suffisante dans les calculs permet de ne retenir qu'un seul entier algébrique pour chaque coefficient. Il suffit alors de construire le polynôme correspondant et de vérifier qu'il définit bien le corps de classes de Hilbert de k.

Des calculs analogues pour démontrer les conjectures de Stark dans le cas de corps cubiques réels ont été menés à bien dans [2] et en utilisant la théorie de Kummer on peut construire le corps de classes de Hilbert d'un corps de nombres (cf. [1]).

On cite, pour terminer, deux exemples obtenus lors de la construction d'une table de corps de classes de Hilbert pour les corps cubiques réels non principaux de discriminant ≤ 100000.

Le corps k défini par une racine θ du polynôme $X^3-21X-35$ est de discriminant 3969 et de nombre de classes 3. On obtient un corps K dont la norme absolue du conducteur est 5 et un polynôme relatif définissant le corps de classes de Hilbert :

$$X^3+(-56\theta^2+176\theta+624)X^2+(1568\theta^2-4920\theta-17491)X+(-6244\theta^2+195920\theta+69649).$$

Le corps k défini par une racine θ du polynôme $X^3-36X-1$ a un discriminant de 20733 et un nombre de classes de 5. Dans ce cas la partie finie du conducteur de K est triviale et l'on obtient le polynôme relatif :

$$X^5+\frac{-77\theta^2-458\theta+10}{3}X^4+\frac{49954\theta^2+298803\theta+892}{3}X^3+(-283000\theta^2-1701860\theta-4672)X^2+$$

$$\frac{375296\theta^2+22569983\theta+62480}{3}X+\frac{-4873366\theta^2-29309938\theta-81019}{3}.$$

Dans chacun des deux exemples, on peut démontrer que le polynôme relatif donné définit le corps de classes de Hilbert du corps k, et que l'unité ε utilisée dans cette construction vérifie la conjecture énoncée dans la limite de la précision des calculs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.Daberkow, M.Pohst, *Computations with relative extensions of number fields with an application to the construction of Hilbert class fields*, Proc. ISAAC'95 (1995).

[2] D.Dummit, J.Sands, B.Tangedal, *Computing Stark units for totally real cubic fields*, Math. Comp. (à paraître).

[3] E.Friedman, *Hecke's integral formula*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux (1987-1988).

[4] J. Martinet, *Character theory and Artin L-functions*, in Algebraic number fields (A.Frölich, ed.), Academic Press, 1977.

[5] H.M.Stark, *Hilbert's twelfth problem and L-series*, Bull. Am. Math. Soc. **83** (1977), 1072–1074.

[6] J. Tate, *Les conjectures de Stark sur les fonctions L d'Artin en $s=0$*, Birkhaüser, Boston, 1984.

[7] E. Tollis, *Calculs dans les corps de nombres : étude algorithmique de la fonction zêta de Dedekind*, Thèse, Université Bordeaux I, 1996.

Laboratoire A2X
Université Bordeaux I
351, cours de la libération
33405 Talence- France
E-mail address: roblot2@math.u-bordeaux.fr