Quelques calculs explicites autour des conjectures de Stark

X.-F. Roblot

Institut Camille Jordan
Université Claude Bernard – Lyon 1

K/k extension abélienne de corps de nombres

$G = \mathsf{Gal}(K/k)$

$S \subset \mathsf{Pl}(k)$ fini contenant $\mathsf{Pl}_\infty(k)$ et $\mathsf{Pl}_{\mathsf{ram}}(K/k)$

objets analytiques $\longleftrightarrow$ objets algébriques

Idéaux et groupe des classes.

$I(K)$ groupe des idéaux, $P(K)$ sous-groupe des idéaux principaux et $\mathrm{Cl}(K) = I(K)/P(K)$ groupe des classes

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \ldots$ idéaux entiers de k, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \ldots$ idéaux entiers de K

$\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \ldots$ idéaux premiers de k, $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q} \ldots$ idéaux premiers de K

Unités (et variations).

Pour $T \subset \mathrm{Pl}(k)$, on définit le sous-groupe de $K^\times$

$$U_T(K) := \left\{ u \in K^\times \text{ tel que } |u|_w = 1, \forall w \in \mathrm{Pl}(K) \text{ avec } w_{|k} \notin T \right\}$$

Pour $T = \mathrm{Pl}_\infty(k)$:	$U_T(K) =: U(K)$	unités de K
Pour $T = \mathrm{Pl}_0(k)$:	$U_T(K) =: \Omega(K)$	anti-unités de K
Pour $T = \emptyset$:	$U_T(K) =: W(K)$	racines de l'unités dans K

Pour $v \in \mathrm{Pl}(k)$, on note $U_v(K) := U_{\{v\}}(K)$.

Fonctions L.

Soit $\chi \in \hat{G}$. On pose, pour $\Re e(s) > 1$

$$L_{K/k,S}(s,\chi) = \prod_{\mathfrak{p} \notin S} \left(1 - \chi(\sigma_{\mathfrak{p}}) \mathcal{N}\mathfrak{p}^{-s}\right)^{-1} = \sum_{(\mathfrak{a},S)=1} \chi(\sigma_{\mathfrak{a}}) \mathcal{N}\mathfrak{a}^{-s}$$

Fonctions zêta partielles.

Soit $\sigma \in G$. On pose, pour $\Re e(s) > 1$

$$\zeta_{K/k,S}(s,\sigma) = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \hat{G}} L_{K/k,S}(s,\chi)\bar{\chi}(\sigma) = \sum_{\substack{(\mathfrak{a},S)=1 \\ \sigma_{\mathfrak{a}}=\sigma}} \mathcal{N}\mathfrak{a}^{-s}$$

Ordre en $s = 0$.

Pour $\chi \in \hat{G}$, on pose $r(\chi) := \mathrm{ord}_{s=0} L_{K/k,S}(s,\chi)$

Soit r le nombre de places dans S totalement décomposées dans K/k

$$\text{Pour } \chi \in \hat{G}, \text{ on a } r(\chi) \geq \begin{cases} r & \text{si } \chi \neq \mathrm{Id} \\ |S| - 1 & \text{si } \chi = \mathrm{Id} \end{cases}$$

Hypothèse.

On a $|S| \geq 3$ et il existe $v \in S$ totalement décomposée dans K/k

Donc, pour tout $\sigma \in G$, on a $\quad \zeta_{K/k,S}(0,\sigma) = 0$

Conjecture de Stark abélienne de rang 1.

Soit $w \in \mathrm{Pl}(K)$ tel que $w_{|k} = v$ et soit $m = \mathrm{card}\, W(K)$.

Il existe $\varepsilon \in U_v(K)$, telle que

$$\log|\varepsilon^\sigma|_w = -m\zeta'_{K/k,S}(0,\sigma), \quad \forall \sigma \in G$$

De plus, $K(\sqrt[m]{\varepsilon})/k$ est abélienne.

Lemme. Supposons que v est réelle, alors ε est une unité et tous les conjugués (réels) de ε au-dessus de la place v ont le même signe.

Conjecture de Stark abélienne de rang 1.

Si $v \in \mathrm{Pl}_{\text{réels}}(k)$, on a $\varepsilon^\sigma = e^{-m\zeta'_{K/k,S}(0,\sigma)}, \ \forall \sigma \in G$

Exemple. On prend $k = \mathbb{Q}(\sqrt{229})$, $\mathfrak{f} = \mathfrak{p}_3\infty_1$ et on pose $K = k(\mathfrak{f})$

On a $\mathrm{Gal}(K/k) = \langle \sigma \rangle \simeq C_6$. On prend $S = \{\mathfrak{p}_3, \infty_1, \infty_2\}$ (minimal).

$$\begin{array}{llll}
\zeta'_{K/k,S}(0,\mathrm{Id}) & = 1.34453817125930.. & \zeta'_{K/k,S}(0,\sigma^3) & = -\zeta'_{K/k,S}(0,\mathrm{Id}) \\
\zeta'_{K/k,S}(0,\sigma) & = 3.03660566462671.. & \zeta'_{K/k,S}(0,\sigma^4) & = -\zeta'_{K/k,S}(0,\sigma) \\
\zeta'_{K/k,S}(0,\sigma^2) & = 1.07106845341434.. & \zeta'_{K/k,S}(0,\sigma^5) & = -\zeta'_{K/k,S}(0,\sigma^2)
\end{array}$$

Donc ε est racine de

$$\begin{aligned}
&X^6 - 29.132745950421..X^5 + 180.796475702529..X^4 - 365.592951405058..X^3 \\
&\qquad + 180.796475702529..X^2 - 29.132745950421..X + 1 \\
&\approx X^6 + (-\sqrt{229} - 14)X^5 + (6\sqrt{229} + 90)X^4 + (-12\sqrt{229} - 184)X^3 \\
&\qquad + (6\sqrt{229} + 90)X^2 - (-\sqrt{229} - 14)X + 1
\end{aligned}$$

On obtient que $K = \mathbb{Q}(\theta)$ où θ est racine du polynôme irréductible

$$\begin{aligned}
&X^{12} - 2X^{11} - 7X^{10} + X^9 + 42X^8 + 37X^7 - 134X^6 \\
&\qquad - 79X^5 + 104X^4 + 99X^3 - 5X^2 - 19X - 1
\end{aligned}$$

Problème. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soient $\epsilon > 0$ et $B > 0$. Trouver $\alpha \in \mathcal{O}_k$ tel que

$$|a - v(\alpha)| < \epsilon \quad \text{et} \quad |v'(\alpha)| < B \quad \text{pour tout } v' \in \mathsf{Pl}_\infty(k) \setminus \{v\}$$

Lemme. Si $\epsilon \leq \dfrac{1}{2^d B^{d-1}}$, avec $d = [k : \mathbb{Q}]$, alors α est unique (s'il existe).

Méthode. Soit $\mathcal{O}_k = \omega_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \omega_d\mathbb{Z}$. On considère la forme quadratique

$$\begin{aligned} Q(x_0, x_1, \ldots, x_d) = B^2 x_0^2 + (B/\epsilon)^2 (x_1 v(\omega_1) + \cdots + x_d v(\omega_d) - x_0 a)^2 \\ + \sum_{v' \neq v} (x_1 v'(\omega_1) + \cdots + x_d v'(\omega_d))^2 \end{aligned}$$

Alors toute solution $< (d+1)B^2$ avec $x_0 = \pm 1$ donne

$$\alpha = x_0(x_1\omega_1 + \cdots + x_d\omega_d)$$

avec $|a - v(\alpha)| < \sqrt{d}\,\epsilon$ et $|v'(\alpha)| < \sqrt{d}\,B$ pour tout $v' \in \mathsf{Pl}_\infty(k) \setminus \{v\}$

Objet analytique.

On pose $\Theta_{K/k,S}(s) := \sum_{\sigma \in G} \zeta_{K/k,S}(s,\sigma)\sigma^{-1} \in \mathbb{C}[G]$ pour $\Re e(s) > 1$

Hypothèse.

k totalement réel et K totalement complexe, sinon $\Theta_{K/k,S}(0) = 0$

Conjecture de Brumer-Stark

On a

$$m\Theta_{K/k,S}(0) \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathrm{Cl}(K)),$$

De plus, pour tout idéal $\mathfrak{A}$ de K, Il existe $\alpha_{\mathfrak{A}} \in K^{\times}$ tel que

- $\mathfrak{A}^{m\Theta_{K/k,S}(0)} = (\alpha_{\mathfrak{A}})$
- $\alpha_{\mathfrak{A}} \in \Omega(K)$ (anti-unité)
- $K(\sqrt[m]{\alpha_{\mathfrak{A}}})/k$ est abélienne

Réduction. L'ensemble des idéaux $\mathfrak{A}$ tels que

$$\mathfrak{A}^{m\Theta_{K/k,S}(0)} = (\alpha_{\mathfrak{A}}) \text{ avec } \alpha_{\mathfrak{A}} \in \Omega(K) \text{ et } K(\sqrt[m]{\alpha_{\mathfrak{A}}})/k \text{ abélienne}$$

est un sous-groupe de $I(K)$, contenant $P(K)$, et stable sous l'action de G. Donc il suffit de vérifier ces propriétés des idéaux $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_t$ tels que

$$\langle [\mathfrak{A}_1], \ldots, [\mathfrak{A}_t] \rangle_{\mathbb{Z}[G]} = \mathrm{Cl}(K).$$

Critères.

- $\alpha \in \Omega_K$ ssi $\alpha^{1+\tau} = 1$ pour toute conjugaison complexe $\tau \in G$
- Supposons $G = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_l \rangle$ et soient $N_1, \ldots, N_l \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout i
  $$\xi^{\sigma_i} = \xi^{N_i} \text{ pour tout } \xi \in W(K)$$
  Alors, $K(\sqrt[m]{\alpha})/k$ abélienne ssi il existe $\beta_1, \ldots, \beta_l \in K^\times$ tels que
  $$\alpha^{\sigma_i - N_i} = \beta_i^m \text{ pour } i = 1, \ldots, l$$
  $$\beta_i^{\sigma_j - N_j} = \beta_j^{\sigma_i - N_i} \text{ pour } 1 \leq i < j \leq l$$

Conjecture de Brumer-Stark.

$m\Theta_{K/k,S}(0) \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathrm{Cl}(K))$ et $\forall \mathfrak{A}$ idéal de K

$\mathfrak{A}^{m\Theta_{K/k,S}(0)} = (\alpha_{\mathfrak{A}})$ avec $\alpha_{\mathfrak{A}} \in \Omega_K$ et $K(\sqrt[m]{\alpha_{\mathfrak{A}}})/k$ abélienne.

Exemple. On prend $k = \mathbb{Q}(\sqrt{23})$ et $K = \mathbb{Q}(\theta)$ où

$$\theta^8 + 16\theta^6 + 86\theta^4 + 176\theta^2 + 98 = 0$$

On a $\mathfrak{f}(K/k) = \mathfrak{p}_2^7\infty_1\infty_2$, $G = \langle\sigma\rangle \simeq C_4$ et $\mathrm{Cl}(K) \simeq C_{26}$ avec $\mathrm{Cl}(K) = \langle[\mathfrak{P}_7]\rangle$.

On prend $S = \{\mathfrak{p}_2, \infty_1, \infty_2\}$ (minimal).

On calcule (avec $m = 2$)

$$m\Theta_{K/k,S}(0) = 8 - 12\sigma - 8\sigma^2 + 12\sigma^3 = 4(1-\sigma^2)(2-3\sigma)$$

On trouve $\mathfrak{P}_7^{m\Theta_{K/k,S}(0)} = (\alpha)$ avec

$$\alpha = \frac{1}{13841287201}\big(342647080\theta^7 + 29342815360\theta^6 + 12834211160\theta^5 + 363823380160\theta^4 + 888341526400\theta^3 + 12180606708800\theta^2 + 14130266024\theta + 92400986335\big)$$

On vérifie que $\quad \alpha^{1+\sigma^2} = 1$ et $\alpha^{\sigma-1} \in K^2$ et la conjecture est *démontrée*

Conjecture de rang 1 revisitée.

Soit $v \in S$ tot. décomposée dans K/k et soit $w \in \mathrm{Pl}(K)$ tel que $w_{|k} = v$. Il existe $\varepsilon \in U_v(K)$ telle que

$$\log|\varepsilon^\sigma|_w = -m\zeta'_{K/k,S}(0,\sigma), \quad \forall \sigma \in G \tag{$\dagger$}$$

De plus, $K(\sqrt[m]{\varepsilon})/k$ est abélienne.

Rappel. $\Theta_{K/k,S}(s) := \sum_{\sigma \in G} \zeta_{K/k,S}(s,\sigma)\sigma^{-1} \in \mathbb{C}[G]$

Donc l'équation ($\dagger$) peut s'écrire

$$\lambda_{K/k,w}(\varepsilon) = -m\,\Theta^{(1)}_{K/k,S}(0)$$

où $\lambda_{K/k,w}(x) := \sum_{\sigma \in G} \log|\varepsilon^\sigma|_w\, \sigma^{-1} \in \mathbb{R}[G]$

Hypothèse. Il existe $v_1, \ldots, v_r \in S$ totalement décomposées dans K/k

Objet analytique.

Puisque $\Theta_{K/k,S}(s) = \sum_{\sigma \in G} \zeta_{K/k,S}(s,\sigma)\sigma^{-1} = \sum_{\chi \in \hat{G}} L_{K/k,S}(s,\chi)\, e_{\bar{\chi}}$, on a

$$\Theta^{(t)}_{K/k,S}(0) = 0 \text{ pour } 0 \leq t < r \quad \text{et} \quad e_\chi \Theta^{(r)}_{K/k,S}(0) = 0 \ \forall \chi \text{ tq } r(\chi) > r$$

Objet algébrique.

On définit un régulateur sur $\bigwedge^r_{\mathbb{Z}[G]} \overline{U_S(K)}$ (avec w_i fixé tq $w_{i|k} = v_i$)

$$R_{K/k,S}(x_1 \wedge \cdots \wedge x_r) = \text{dét}\left(\lambda_{K/k,w_i}(x_j)\right)_{1 \leq i,j \leq r}$$

On pose $\tilde{e}_{>r} := |G| \sum_{r(\chi)>r} e_\chi \in \mathbb{Z}[G]$ et

$$\mathcal{A}_{K/k,S,r} := \text{Ker}\left(\tilde{e}_{>r} : \bigwedge^r_{\mathbb{Z}[G]} \overline{U_S(K)} \to \bigwedge^r_{\mathbb{Z}[G]} \overline{U_S(K)}\right)$$

Différents objets.

$\Theta_{K/k,S}(s) = \sum_{\sigma \in G} \zeta_{K/k,S}(s,\sigma)\sigma^{-1} = \sum_{\chi \in \hat{G}} L_{K/k,S}(s,\chi)\, e_{\bar{\chi}}$

$R_{K/k,S}(x_1 \wedge \cdots \wedge x_r) = \text{dét}\left(\lambda_{K/k,w_i}(x_j)\right)_{1 \le i,j \le r}$

$\mathcal{A}_{K/k,S,r} := \text{Ker}\left(\tilde{e}_{>r} : \bigwedge^r_{\mathbb{Z}[G]} \overline{U_S(K)} \to \bigwedge^r_{\mathbb{Z}[G]} \overline{U_S(K)}\right)$

Conjecture abélienne de rang supérieur sur $\mathbb{Q}$.

Il existe un unique $\eta_{K/k,S} \in \mathbb{Q} \otimes \mathcal{A}_{K/k,S,r}$ tel que

$$R_{K/k,S}(\eta_{K/k,S}) = \Theta^{(r)}_{K/k,S}(0)$$

Remarque. Une conjecture *sur* $\mathbb{Z}$ consiste à préciser un sous-réseau de $\mathbb{Q} \otimes \mathcal{A}_{K/k,S,r}$ qui contient $\eta_{K/k,S}$. Deux versions existent de Rubin et Popescu.

Conjecture abélienne de rang supérieur sur $\mathbb{Q}$.

Il existe un unique $\eta_{K/k,S} \in \mathbb{Q} \otimes \mathcal{A}_{K/k,S,r}$ tel que $R_{K/k,S}(\eta_{K/k,S}) = \Theta^{(r)}_{K/k,S}(0)$

Exemple. On prend $k = \mathbb{Q}(\alpha)$ avec $\alpha^3 + \alpha^2 - 14\alpha - 23 = 0$ et $K = \mathbb{Q}(\theta)$ avec

$$\theta^{12} + 3\theta^{11} - 14\theta^{10} - 46\theta^9 + 64\theta^8 + 248\theta^7 - 97\theta^6 - 548\theta^5 + 8\theta^4 + 418\theta^3 - 11\theta^2 - 66\theta - 9 = 0$$

On a $\mathfrak{f}(K/k) = \mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$ et $G = \langle \sigma, \tau \rangle \simeq C_2 \times C_2$.

On prend $S = \{\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \infty_1, \infty_2, \infty_3\}$ et donc $r = 3$ avec $v_i = \infty_i$, $i = 1, 2, 3$.

On calcule

$$\Theta^{(3)}_{K/k,S}(0) = 21.478816585474778922.. - 7.002413205331330441..\sigma - 19.959429883577094044..\tau + 5.483026503433645563..\sigma\tau$$

Conjecture abélienne de rang supérieur sur $\mathbb{Q}$.
Il existe un unique $\eta_{K/k,S} \in \mathbb{Q} \otimes \mathcal{A}_{K/k,S,r}$ tel que $R_{K/k,S}(\eta_{K/k,S}) = \Theta^{(r)}_{K/k,S}(0)$

On a $\mathrm{rang}_{\mathbb{Z}}(\overline{U_S(K)}) = 13$, et $r(\chi) = 3$ pour $\chi \in \hat{G}$ avec $\chi \neq \mathrm{Id}$ et $r(\mathrm{Id}) = 4$, donc $\tilde{e}_{>3} = 1 + \sigma + \tau + \sigma\tau$

Lemme.

$$\mathbb{R} \otimes \mathcal{A}_{K/k,S,r} \overset{R_{K/k,S}}{\simeq} \mathrm{Ker}\,(\tilde{e}_{>r} : \mathbb{R}[G] \to \mathbb{R}[G])$$

$\gamma \in \mathbb{R} \otimes \mathcal{A}_{K/k,S,r}$ est un $\mathbb{R}[G]$-générateur ssi $R_{K/k,S}(\gamma)^{e_\chi} \neq 0$, $\forall \chi$ tq $r(\chi) = r$

On prend des éléments de $\mathcal{A}_{K/k,S,r}$ au hasard et on teste s'ils donnent un générateur γ. On trouve $\gamma = u_1 \wedge u_2 \wedge u_3$ avec

$$u_1 = \frac{1}{21}(\theta^{11} - 3\theta^{10} - 17\theta^9 + 35\theta^8 + 106\theta^7 - 115\theta^6 - 289\theta^5 + 31\theta^4 + 347\theta^3 + 247\theta^2 - 233\theta - 54)$$

$$u_2 = \frac{1}{3}(\theta^{11} + 3\theta^{10} - 17\theta^9 - 43\theta^8 + 106\theta^7 + 206\theta^6 - 292\theta^5 - 350\theta^4 + 317\theta^3 + 94\theta^2 - 53\theta - 12)$$

$$u_3 = \frac{1}{21}(-59\theta^{11} - 75\theta^{10} + 961\theta^9 + 1085\theta^8 - 5687\theta^7 - 5290\theta^6 + 14636\theta^5 + 9574\theta^4 - 14761\theta^3 - 4199\theta^2 + 3268\theta + 792)$$

et $R_{K/k,S}(\gamma) = 24.6405333.. + 29.2831528..\sigma - 0.3303460..\tau - 53.5933400..\sigma\tau$

Conjecture abélienne de rang supérieur sur $\mathbb{Q}$.

Il existe un unique $\eta_{K/k,S} \in \mathbb{Q} \otimes \mathcal{A}_{K/k,S,r}$ tel que $R_{K/k,S}(\eta_{K/k,S}) = \Theta^{(r)}_{K/k,S}(0)$

On a

$$\Theta^{(3)}_{K/k,S}(0) = 21.4788165.. - 7.0024132..\sigma - 19.9594298..\tau + 5.4830265..\sigma\tau$$

$$R_{K/k,S}(\gamma) = 24.6405333.. + 29.2831528..\sigma - 0.3303460..\tau - 53.5933400..\sigma\tau$$

Puisque γ engendre $\mathbb{R} \otimes \mathcal{A}_{K/k,S,r}$ sur $\mathbb{R}[G]$, il existe $A \in \mathbb{R}[G]$ tel que

$$\Theta^{(3)}_{K/k,S}(0) = A \cdot R_{K/k,S}(\gamma)$$

La conjecture est vraie si $A \in \mathbb{Q}[G]$ (en prenant $\eta_{K/k,S} = A \cdot \gamma$).

On calcule

$$A = 0.3750000.. + 0.500000..\sigma + 0.3750000..\tau = \frac{1}{8}(3 + 4\sigma + 3\tau)$$

Soit p premier. On définit un régulateur p-adique sur $\bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^r \overline{U_S(K)}$

$$R_{K/k,S,p}(x_1 \wedge \cdots \wedge x_r) = \text{dét}\left(\lambda_{K/k,p,w_i}(x_j)\right)_{1\leq i,j\leq r}$$

avec $\lambda_{K/k,p,w}(x) := \sum_{\sigma\in G} \log_p\left(j_p \circ w(\varepsilon^\sigma)\right)\sigma^{-1} \in \overline{\mathbb{Q}}_p[G]$ avec $j_p : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$

Que peut-on dire de $R_{K/k,S,p}(\eta_{K/k,S})$?

Conjecture sur les fonctions zêta p-adiques en $s = 1$

- Valeurs en $s = 0$ et $s = 1$ non liées
- Pas d'annulation en $s = 0$
- Interpolation des termes négatifs d'une PA contenant 1

$\rightsquigarrow$ Reformulation nécessaire en $s = 1$ dans le cas complexe
 $\rightsquigarrow$ Problème des sommes de Gauss

Solution. formuler la conjecture en termes de fonctions zêta tordues

Fonctions zêta tordues. Soit $\xi : (\mathfrak{a}, +) \to \mathbb{C}^\times$ d'annulateur $\mathfrak{f}$ $(\neq \mathcal{O}_k)$.
On pose

$$Z_{K/k}(s,\xi) := \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a})} \xi(\alpha) |\mathcal{N}(\mathfrak{a}^{-1}\alpha)|^{-s}$$

avec $\mathcal{R}_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a})$ système de représentants de $\mathfrak{a}$ modulo $U_k(\mathfrak{f})$.

Classes de caractères. On définit une relation d'équivalence sur les caractères additifs d'annulateur $\mathfrak{f}$. Le quotient $\mathfrak{W}_{\mathfrak{f}}$ vérifie

$$\mathfrak{W}_{\mathfrak{f}} \cong \mathrm{Cl}_{\mathfrak{f}}(k)$$

On pose $K = k(\mathfrak{f})$ d'où $G \cong \mathrm{Cl}_{\mathfrak{f}}(k)$ et pour $\Re e(s) > 1$

$$\Phi_{K/k,\mathfrak{f}}(s) := \sum_{\mathfrak{c} \in \mathrm{Cl}_{\mathfrak{f}}(k)} Z_{K/k}(s, \mathfrak{w}_{\mathfrak{c}})\, \sigma_{\mathfrak{c}}^{-1}$$

Version p-adique. On définit une version p-adique $\Phi_{K/k,\mathfrak{f},p}(s)$, si $(f, \mathfrak{p}) = 1$, en supprimant les facteurs en p et en interpolant aux entiers $m \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ avec $m \equiv 1 \pmod{p-1 \text{ ou } 2}$

Hypothèses. k totalement réel de degré r, $K = k(\mathfrak{f})$ le corps de classes de rayon avec $\mathfrak{f} \neq \mathcal{O}_k$. Les places $v_1, \ldots, v_r$ sont les places infinies de k et S est minimal.

Conjecture de Solomon.

Il existe un unique $\eta_{K/k} \in \mathbb{Q} \otimes \mathcal{A}_{K/k,S,r}$ tel que

$$R_{K/k,S}(\eta_{K/k}) = \sqrt{d_k}\Phi_{K/k,\mathfrak{f}}(1)$$

et pour tout p premier, relativement premier à $\mathfrak{f}$, on a aussi

$$\prod_{\mathfrak{p}|p}(1 - \mathcal{N}\mathfrak{p}^{-1}\,\sigma_{\mathfrak{p}})R_{K/k,S,p}(\eta_{K/k}) = j_p(\sqrt{d_k})\Phi_{K/k,\mathfrak{f},p}(1)$$

Remarque. La conjecture de Solomon est plus fine car elle précise un sous-réseau de $\mathbb{Q} \otimes \mathcal{A}_{K/k,S,r}$ qui contient $\eta_{K/k}$.

Conjecture de Solomon.
Il existe un unique $\eta_{K/k} \in \mathbb{Q} \otimes \mathcal{A}_{K/k,S,r}$ tel que $R_{K/k,S}(\eta_{K/k}) = \Phi_{K/k,\mathfrak{f}}(1)$
et $\prod_{\mathfrak{p}|p}(1 - \mathcal{N}\mathfrak{p}^{-1}\sigma_{\mathfrak{p}})R_{K/k,S,p}(\eta_{K/k}) = j_p(\sqrt{d_k})\Phi_{K/k,\mathfrak{f},p}(1)$ $\forall p$ avec $(p, \mathfrak{f}) = 1$

Exemple. On prend $k = \mathbb{Q}(\sqrt{37})$ (donc $r = 2$) et $K = \mathbb{Q}(\theta)$ où

$$\theta^6 - 3\theta^5 - 2\theta^4 + 9\theta^3 - 5\theta + 1 = 0$$

On a $K = k(\mathfrak{f})$ où $\mathfrak{f} = 2\mathcal{O}_K$, $G = \langle\sigma\rangle \simeq C_3$.

On détermine que

$$\gamma = \left(\theta^5 - 2\theta^4 - 3\theta^3 + 5\theta^2 + 2\theta - 2\right) \wedge \left(\theta^3 - 2\theta^2 - 2\theta + 3\right)$$

engendre $\mathbb{R} \otimes \mathcal{A}_{K/k,S,r}$ sur $\mathbb{R}[G]$. Et par les méthodes précédentes, on trouve que

$$\eta_{K/k} = \frac{1}{2}(1 - \sigma - \sigma^2)\,\gamma$$

"vérifie" la première assertion.

Conjecture de Solomon.
Il existe un unique $\eta_{K/k} \in \mathbb{Q} \otimes \mathcal{A}_{K/k,S,r}$ tel que $R_{K/k,S}(\eta_{K/k}) = \Phi_{K/k,\mathfrak{f}}(1)$
et $\prod_{\mathfrak{p}|p}(1 - \mathcal{N}\mathfrak{p}^{-1}\sigma_{\mathfrak{p}})R_{K/k,S,p}(\eta_{K/k}) = j_p(\sqrt{d_k})\Phi_{K/k,\mathfrak{f},p}(1)$ $\forall p$ avec $(p, \mathfrak{f}) = 1$

- Pour $p = 3$,
$\Phi_{K/k,\mathfrak{f},3}(1) = 0.20202122200120202..{}_3 + 0.00211222221211012..{}_3(\sigma + \sigma^2)$ et
$$\left(1 - \frac{\sigma_{\mathfrak{p}_3}}{3}\right)\left(1 - \frac{\sigma_{\mathfrak{q}_3}}{3}\right) R_{K/k,S,3}(\eta_{K/k}) \approx j_3(\sqrt{d_K})\Phi_{K/k,\mathfrak{f},3}(1)$$
- Pour $p = 7$,
$\Phi_{K/k,\mathfrak{f},7}(1) = 0.23203400342215530..{}_7 + 0.62421446204116266..{}_7(\sigma + \sigma^2)$ et
$$\left(1 - \frac{\sigma_{\mathfrak{p}_7}}{7}\right)\left(1 - \frac{\sigma_{\mathfrak{q}_7}}{7}\right) R_{K/k,S,7}(\eta_{K/k}) \approx j_7(\sqrt{d_K})\Phi_{K/k,\mathfrak{f},7}(1)$$
- Pour $p = 11$,
$\Phi_{K/k,\mathfrak{f},11}(1) = 0.859AA8491A45922..{}_{11} + 0.593A1A1A4963370..{}_{11}(\sigma + \sigma^2)$ et
$$\left(1 - \frac{\sigma_{\mathfrak{p}_{11}}}{11}\right)\left(1 - \frac{\sigma_{\mathfrak{q}_{11}}}{11}\right) R_{K/k,S,11}(\eta_{K/k}) \approx j_{11}(\sqrt{d_K})\Phi_{K/k,\mathfrak{f},11}(1)$$