Université de Bordeaux
Mathématiques

Préparation à l'agrégation
2015–2016

Mise sous forme implicite de courbes et de surfaces

Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury demande que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur. Il est souhaitable que vous organisiez votre présentation comme si le jury n'avait pas connaissance du texte. Le jury aura néanmoins le texte sous les yeux pendant votre exposé.

[*Texte adapté du texte homonyme dans* Mathématiques en situation*, édité par C. Ruget, collection Scopos, vol.* ***11***.]

1. Introduction

Étant donnée une courbe paramétrée du plan donnée par

$$x(t) = \frac{f_1(t)}{f_2(t)} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{g_1(t)}{g_2(t)},$$

où f_1, f_2, g_1, g_2 sont des fonctions polynômiales, on connaît plusieurs algorithmes pour en trouver une équation implicite cartésienne, un des plus connus étant la méthode des résultants.

Soit la courbe donnée par

$$x(t) = t^4 - t + 1, \quad y(t) = t^3 + t + 1; \tag{1}$$

le calcul du résultant des polynômes en t : $x(t)-x$ et $y(t)-y$ donne immédiatement une équation cartésienne implicite de la courbe

$$-x^3 + 5x^2 + -4xy^2 + 13xy + y^4 - 7y^3 + 22y^2 - 18x - 34y + 23.$$

Cet algorithme fonctionne aussi pour les surfaces. Soit la surface donnée par

$$\begin{aligned} x(t,s) &= \frac{t^2 - 2st - 1}{t^2 + 1}, \\ y(s,t) &= \frac{2t + st^2 + s}{t^2 + 1}, \\ z(t,s) &= s; \end{aligned}$$

Le calcul de

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_s \Big(& \mathrm{Res}_t(x(t,s) - x, y(t, s-y)), \\ & \mathrm{Res}_t(x(t,s) - x, z(t,s) - z)\Big) \end{aligned}$$

donne une équation implicite de la surface[1]. Malheureusement, l'équation obtenue n'est pas optimale, en effet, on peut factoriser l'équation et se rendre compte de l'apparition de termes parasites : $x - 1$ et $x + 1$.

2. Un algorithme donnant une forme implicite optimale

Définition 2.1. Soient f et g deux polynômes dans $\mathbb{Q}[T]$, le polynôme f ayant dans $\mathbb{C}$ les racines $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ distinctes de multiplicités respectives $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$; on appelle *trace* de g sur f la quantité

$$\tau_f(g) := \sum_{k=1}^{s} \alpha_k g(\lambda_k).$$

Théorème 2.2. *$\tau_f(g) \in \mathbb{Q}$ est le coefficient de T^{-1} dans la fraction rationnelle $gf'/f \in \mathbb{Q}(T)$, lorsqu'on la développe suivant les puissances décroissantes.*

Définition 2.3. Si $x_1, \ldots, x_n$ sont n variables, les fonctions symétriques élémentaires des x_k sont redéfinies[2] par

$$\prod_{k=1}^{n} (T - x_k) = T^n + \sigma_1 T^{n-1} + \cdots + \sigma_{n-1} T + \sigma_n,$$

ainsi que $\sigma_0 := 1$.

Définition 2.4. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des variables. On appelle *somme de Newton de rang k* l'expression

$$S_k(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{j=1}^{n} x_j^k.$$

Proposition 2.5 (Formules de Newton)**.** *Soit $x_1, \ldots, x_n$ des variables et $j \in \{1, \ldots, n\}$. On a*

$$j\sigma_j + S_j + S_{j-1}\sigma_1 + \cdots + S_1\sigma_{j-1} = 0.$$

Théorème 2.6 (Cas polynômial)**.** *Soit $\mathcal{C}$ une courbe définie par une paramétrisation polynômiale :*

$$x = f(t), \quad y = g(t),$$

où f et g sont des polynômes et ou $\deg g = n$. Alors si $t_1, \ldots, t_n$ sont les n racines (distinctes ou confondues) de $g(t) - y$ dans une clôture algébrique de $\mathbb{Q}(y)$, si on pose $r_k(y) := \sigma_k(f(t_1), \ldots, f(t_n))$ et $S_k(y) := S_k(f(t_1), \ldots, f(t_n))$, alors l'équation implicite de $\mathcal{C}$ est la partie sans carré du polynôme

$$x^n + r_1(y)x^{n-1} + \ldots r_n(y),$$

---

[1]Dans cet exemple particulier, l'élimination de s est aisée : c'est z. Aussi peut-on gagner en vitesse en calculant directement $\mathrm{Res}_t(x(t,z) - x, y(t,z) - y)$. En ce cas on obtient une équation cartésienne optimale.

[2]Elle diffèrent des définitions usuelles par un signe.

où les $r_k(y)$ *sont donnés par les formules de récurrence*

$$kr_k(y) = -S_k(y) - S_{k-1}(y)r_1(y) - \cdots - S_1(y)r_{k-1}(y),$$

où chaque $S_j(y)$ *est le coefficient de* t^{-1} *dans le développement de*

$$f(t)^j g'(t)/(g(t) - y).$$

Théorème 2.7 (Cas rationnel)**.** *. Soit* $\mathcal{C}$ *une courbe définie par une paramétrisation polynômiale :*

$$x = f_1(t)/f_2(t), \quad y = g_1(t)/g_2(t),$$

où f_1 *et* f_2 *(resp.* g_1 *et* g_2*) sont des polynômes premiers entre eux, et où* n *est le maximum des degrés de* g_1 *et* g_2*. Alors l'équation implicite de* $\mathcal{C}$ *est la partie sans carré du polynôme*

$$x^n + r_1(y)x^{n-1} + \ldots r_n(y),$$

où les $r_k(y)$ *sont donnés par les formules de récurrence*

$$kr_k(y) = -S_k(y) - S_{k-1}(y)r_1(y) - \cdots - S_1(y)r_{k-1}(y),$$

où chaque $S_j(y)$ *est le coefficient de* t^{-1} *dans le développement de*

$$\frac{(u(y,t)f_1(t))^j(g_1'(t) - yg_2'(t))}{g_1(t) - yg_2(t)},$$

le polynôme u *étant le coefficient de Bézout* $\in \mathbb{Z}(y)[t]$ *dans*

$$u(y,t)f_2(t) + v(y,t)(g_1(t) - yg_2(t)) = 1$$

3. Suggestions

- Justifier l'existence des termes parasites dans le premier exemple, donné par l'équation (1).
- Appliquer les deux derniers théorèmes aux exemples du début du texte.
- Démontrer les énoncés du texte.