

Feuille d'exercices n° 2

SÉRIES NUMÉRIQUES

### 1 Quelques séries simples

**Exercice 1.** Calculer les sommes suivantes :

1.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ,
2.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$  (on appliquera ici Taylor-Lagrange à l'exponentielle entre 0 et 1),
3.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  (on appliquera ici Taylor-Lagrange à la fonction  $-\ln(1+x)$  entre 0 et 1).

**Exercice 2.** Étudier la convergence des séries  $\sum \frac{n^2}{n^2+1}$ , et  $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ .

### 2 Séries à termes positifs

**Exercice 3.** Étudier la convergence de la série de terme général  $u_n$  dans les cas suivants :

- |  |  |  |   |
|--|--|--|---|
| 1. (a) $u_n = \frac{n+1}{n^3-7}$ ,                           | (c) $u_n = \frac{n+1}{n-7}$ ,                    | (e) $u_n = \frac{2^n+3^n}{n^2+5^n}$ ,              |   |
| (b) $u_n = \frac{n+1}{n^2-7}$ ,                              | (d) $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ,     | (f) $u_n = \frac{1}{n^{(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}}$ , |   |
| 2. (a) $u_n = \frac{1}{\ln(n^2+2)}$ ,                        | (b) $u_n = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$ ,     | (c) $u_n = \frac{n}{2^n}$ ,                        | (d) $u_n = \frac{n^{100\,000}}{2^n}$ ,          |
| 3. (a) $u_n = \frac{1}{n!}$ ,                                | (b) $u_n = \frac{n^{100\,000}}{n!}$ ,            | (c) $u_n = \frac{2^n}{n!}$ ,                       | (d) $u_n = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}$ , |
| 4. (a) $u_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$ , | (b) $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ , | (c) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ .   |   |

**Exercice 4.**

1. Trouver une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x \ln^3(x)}$ .
2. Montrer que pour  $a > 1$ , l'intégrale impropre  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3(x)}$  est convergente.
3. On pose  $u_n = \frac{1}{n \ln^3(n)}$  pour  $n \geq 2$ . Montrer que la série  $\sum u_n$  converge.
4. Donner un encadrement de  $R_n$ , le reste d'ordre  $n$  de  $\sum u_n$ .

**Exercice 5.** Déterminer la nature et la somme de la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n-2}{n^3+3n^2+2n}$ .

### Exercice 6.

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \sqrt{n}2^{-n}$ , et  $v_n = u_n - u_{n+1}$ . Montrer qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \alpha v_n$ .
2. Trouver un équivalent simple de  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sqrt{k}2^{-k}$  lorsque l'entier  $n$  tend vers l'infini.

### Exercice 7. Cas limite de la règle de d'Alembert

Soit, pour  $n \geq 1$  et  $a > 0$ , la suite  $u_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ .

1. Étudier la convergence de la série  $\sum_n u_n$  lorsque  $a \neq e$ .
2. Lorsque  $a = e$ , prouver que, pour  $n$  assez grand,  $u_{n+1}/u_n \geq 1$ . Que dire de la nature de la série  $\sum_n u_n$ ?

## 3 Séries à termes quelconques

**Exercice 8.** Étudier la convergence de la série de terme général  $u_n$  dans les cas suivants :

1. (a)  $u_n = (-1)^n \frac{n^3}{n!}$ , (b)  $u_n = \frac{a^n}{n!}$  avec  $a \in \mathbb{C}$ , (c)  $u_n = na^{n-1}$  avec  $a \in \mathbb{C}$ ,
2. (a)  $u_n = (-1)^n \frac{1}{\ln(n+1)}$ , (b)  $u_n = \sin\left(\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi\right)$ , (c)  $u_n = (-1)^n(\sqrt{1+n} - \sqrt{n})$ .

### Exercice 9. Une erreur classique

1. Montrer que la série  $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  converge.
2. Démontrer que  $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ .
3. Étudier la convergence de la série  $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ .
4. Qu'a-t-on voulu mettre en évidence dans cet exercice?

**Exercice 10.** On considère deux suites complexes  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$ . On s'intéresse à la convergence de la série

$$\sum_n u_n v_n. \text{ Pour } n \geq 1, \text{ on note } s_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

1. Montrer que, pour tout  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $p \leq q$ , on a :

$$\sum_{k=p}^q u_k v_k = s_q v_q - s_{p-1} v_p + \sum_{k=p}^{q-1} s_k (v_k - v_{k+1}).$$

2. Montrer que si la suite  $(s_n)_n$  est bornée, et si la suite  $(v_n)_n$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , décroissante et de limite nulle, alors  $\sum_n u_n v_n$  est convergente.

**Exercice 11.** Étudier la convergence de la série de terme général  $u_n$  dans les deux cas suivants :  $u_n = \frac{\cos(n)}{n^2}$  et  $u_n = \frac{\cos(n)}{n}$ . Pour l'étude de cette dernière, on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent.

**Exercice 12.**

1. En linéarisant  $\cos^2(n)$ , montrer que la série de terme général  $u_n = \frac{\cos^2(n)}{n}$  diverge.
2. En utilisant un développement limité, montrer que la série de terme général  $u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$ , pour  $n \geq 1$ , diverge.

**Exercice 13.** Étudier la convergence de la série de terme général  $u_n$  dans les deux cas suivants :

1.  $u_n = n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \cos \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ ,
2.  $u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$ .

**Exercice 14.** Calculer la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ , où  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!k!}$ .**Exercice 15.** Calculer la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ , où  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k!2^{n-k}}$ .**Exercice 16.** Les séries suivantes sont-elles convergentes ?

1.  $\sum \left( \frac{1}{n^{3/4}} + \frac{\sin(2n)}{n^{3/4}} \right)$ ,
2.  $\sum \left( \frac{1}{n^{3/4}} + \frac{1 - n^{(n-3/4)}}{n^n} \right)$ ,
3.  $\sum \left( \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^{3/4}}} - \exp \left( \frac{(-1)^{n+1}}{2n^{3/4}} \right) \right)$ .