Feuille d'exercices n° 3

TOPOLOGIE

1 Normes

Exercice 1. Les normes usuelles de $\mathbb{R}^n$

On définit sur $\mathbb{R}^n$ les applications suivantes :
pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|,$$

1. Montrer que $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.
2. On s'intéresse ici à la norme $\|x\|_2$:
   a. On se propose de démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour cela on introduit la fonction polynôme de degré 2 définie par :
   $$P : t \to \sum_{i=1}^{n} (x_i + ty_i)^2,$$
   lorsque x et y désignent deux vecteurs donnés de $\mathbb{R}^n$.
   (i) Quelle condition sur le discriminant de P traduit le fait que P est toujours à valeurs positives ?
   (ii) En déduire l'inégalité dite de Cauchy-Schwarz
   $$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \|x\|_2 \, \|y\|_2.$$
   b. En déduire que $\|.\|_2$ vérifie l'inégalité triangulaire et constitue une norme sur $\mathbb{R}^n$.
3. Etablir les inégalités suivantes : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
   $$\begin{cases} \|x\|_\infty & \leq & \|x\|_1 & \leq & n\|x\|_\infty, \\ \|x\|_\infty & \leq & \|x\|_2 & \leq & \sqrt{n}\|x\|_\infty, \\ \|x\|_2 & \leq & \|x\|_1 & \leq & \sqrt{n}\|x\|_2. \end{cases}$$
   En conclure que les trois normes étudiées sont équivalentes.
4. Représenter dans $\mathbb{R}^2$ les boules centrées à l'origine et de rayon 1 pour chacune des trois normes envisagées ci-dessus.

Exercice 2. On considère les applications suivantes :

$$N_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & |x_1 + x_2| + |x_1| \end{array} \qquad N_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & \max(|x_1 + 3x_2|, |x_1 - x_2|) \end{array}$$

1. Vérifier que chacune de ces applications définit une norme.
2. Tracer la boule unité autour de l'origine par rapport à N_1, et par rapport à N_2.

Exercice 3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pour que l'application

$$N \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & |ax_1 + bx_2| + |cx_1 + dx_2| \end{array}$$

définisse une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2 Ouverts, fermés

Exercice 4. Montrer en utilisant la définition d'un ouvert et d'un fermé que :

(i) Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une réunion de boules ouvertes.

(ii) L'ensemble $]a, b[$, $a < b$ est ouvert dans $\mathbb{R}$.

(iii) L'ensemble $[a, b]$, $a < b$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

(iv) L'ensemble $[a, b[$, $a < b$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

(v) L'ensemble $\{1/n, \ n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

(vi) L'ensemble $\{1/n, \ n \in \mathbb{N}^*\}$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

(vii) Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ contenant une boule ouverte, alors $F = \mathbb{R}^n$.

Exercice 5. Déterminer si les ensembles suivantes sont ouverts, fermés, ni ouverts ni fermés.

(i) L'intervalle dans $\mathbb{R}^2$: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ 1 < x < 3, y = 0.\}$

(ii) Le cercle unitaire : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ x^2 + y^2 = 1.\}$

(iii) Le disque : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ x^2 + y^2 \leq 1.\}$

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel normé. On fixe $x_0 \in F$ et on définit

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} E & \longmapsto & E \\ u & \longrightarrow & x_0 + u \end{array}$$

1. Montrer que si $U \subset E$ est une partie ouverte, alors $f(U)$ est aussi une partie ouverte de E.
2. Montrer que si $F \subset E$ est une partie fermée, alors $f(F)$ est aussi une partie fermée de E.

Exercice 7.

1. Montrer que si $\{U_i\}_{i=1}^I$ est une famille finie d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ alors $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{I} U_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
2. Déterminer $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-1/n, 1/n\right[$ et en déduire que le résultat précédent ne se généralise pas lorsque l'on considère une famille infinie d'ouverts.
3. Enoncer (et démontrer) les résultats analogues à ceux qui précèdent concernant l'union de familles de fermés.

Exercice 8. Déterminer l'intérieur, la frontière et l'adhérence des ensembles suivants. Déterminer également s'ils sont ouverts, fermés, ni ouverts ni fermés.

$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$,

$B = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}^*\}$,

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \text{ et } y \leq 1 - x^2\}$.

Exercice 9. Voisinage

1. Etablir si les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes sont *positives* au voisinage de l'origine :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 1 + x\sin(1/x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

2. Etablir si les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes sont *définies* au voisinage de l'origine :

$$f(x, y) = \sqrt{x + y}, \qquad f(x, y) = \ln(\cos(x^2 + y^2)).$$