ALGÈBRE BILINÉAIRE (MAT241)

Notes de cours. Texte non définitif et non identique aux cours donnés, ne se substituant donc pas à ces derniers. Contient sans doutes des erreurs : merci de les signaler aux enseignants !

Table des matières

1. Formes bilinéaires et formes quadratiques

Dans toute la suite, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1. **Formes bilinéaires.** Commençons par introduire les protagonistes de ce cours.

Définition 1. *Une forme bilinéaire sur E est une application*

$$\phi : E \times E \to \mathbb{K}$$

linéaire par rapport à chacune de ses variables, c'est-à-dire telle que

$$\begin{cases} \forall x, x' \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall y \in E, \phi(x + \lambda x', y) = \phi(x, y) + \lambda \phi(x', y) \\ \forall x \in E, \forall y, y' \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \phi(x, y + \lambda y') = \phi(x, y) + \lambda \phi(x, y'). \end{cases}$$

On notera $\mathcal{BL}(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires sur E.

Exemple 1. *Les application $\phi : E \times E \to \mathbb{K}$ suivantes sont des formes bilinéaires sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E :*
- *$E = \mathbb{K}$ et $\phi(x, y) = xy$;*
- *$E = \mathbb{K}^2$ et, pour tout $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{K}^2$, $\phi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$ (lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$) ;*
- *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\phi(x, y) = \ell_1(x)\ell'_1(y)$ où ℓ_1 et ℓ'_1 sont des formes linéaires sur E ;*
- *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\phi(x, y) = \sum_{i=1}^{r} \ell_i(x)\ell'_i(y)$ où $\ell_1, \dots, \ell_r$ et $\ell'_1, \dots, \ell'_r$ sont des formes linéaires de E ;*
- *$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, E est l'espace $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur un intervalle fermé borné $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles, et $\phi(f, g) = \int_I f(t)g(t)dt$.*

Exercice 2. *Soit ϕ une forme bilinéaire sur E. Montrer que, pour tout $x \in E$, $\phi(x, 0) = \phi(0, x) = \phi(0, 0) = 0$.*

Notons que, si ϕ, φ sont des formes bilinéaires sur E et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\phi + \lambda\varphi : E \times E \to \mathbb{K}, (x, y) \mapsto \phi(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

est un forme bilinéaire sur E. En termes plus formels :

Proposition 3. *L'ensemble $\mathcal{BL}(E)$ des formes bilinéaires sur E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(E \times E, \mathbb{K})$ des applications de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$.*

1.2. **Représentation matricielle des forme bilinéaires en dimension finie.** Dans cette sous-section, E est un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, et ϕ est une forme bilinéaire sur E.

Notons que, pour tous éléments $x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_je_j$ de E, on a

$$\phi(x, y) = \sum_i x_i\phi(e_i, y) = \sum_i x_i \left(\sum_j y_j\phi(e_i, e_j)\right) = \sum_{i,j} x_iy_j\phi(e_i, e_j). \tag{1}$$

Réciproquement, toute application de la forme

$$E \times E \to \mathbb{K}, (x, y) \mapsto \sum_{i,j} x_iy_jm_{i,j}$$

est une forme bilinéaire. La formule (1) conduit tout droit à la représentation matricielle des formes bilinéaires.

Proposition-Définition 4. *Il existe une unique matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tous éléments $x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_je_j$ de E, on ait*

$$\phi(x, y) = (x_1, \dots, x_n)M \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Cette matrice, notée $M_{\mathcal{B}}(\phi)$, est appelée la matrice de la forme bilinéaire ϕ dans la base $\mathcal{B}$ et est donnée par

$$M_{\mathcal{B}}(\phi) := (\phi(e_i, e_j))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$

Démonstration. Montrons d'abord l'unicité. Considérons $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tous éléments $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ de E, on ait

$$\phi(x, y) = (x_1, \ldots, x_n)M \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

On a

$$(x_1, \ldots, x_n)M \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n y_j m_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n y_j m_{n,j} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j m_{i,j}.$$

En prenant $x = e_i$ et $y = e_j$, on obtient $\phi(e_i, e_j) = m_{i,j}$, d'où l'unicité : M est nécessairement égale à $M_{\mathcal{B}}(\phi)$.

Il reste à montrer que $M_{\mathcal{B}}(\phi)$ vérifie la formule annoncée. D'une part, par bilinéarité de ϕ, on a

$$\phi(x, y) = \sum_i x_i \phi(e_i, y) = \sum_i x_i \left(\sum_j y_j \phi(e_i, e_j) \right).$$

D'autre part, on a

$$(x_1, \ldots, x_n)M_{\mathcal{B}}(\phi) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n y_j \phi(e_1, e_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n y_j \phi(e_n, e_j) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j \phi(e_i, e_j).$$

D'où le résultat. □

Exercice 5. *Montrer que pour $E = \mathbb{K}^n$, $\mathcal{B}$ la base canonique, et $\phi(x, y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$, on a $M_{\mathcal{B}}(\phi) = I_n$.*

Exercice 6. *Montrer que pour $E = \mathbb{K}^3$, $\mathcal{B}$ la base canonique, et $\phi(x, y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_2 - 2x_2y_3 - x_3y_1 - 2x_3y_3$, on a*

$$M_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}' = ((0, 1, 1), (0, -1, 1), (1, 0, 1))$.

Exercice 7. *Soit ϕ un forme bilinéaire sur E. Montrer que l'application $\phi' = E \times E \to E$, $(x, y) \mapsto \phi(y, x)$ est une forme bilinéaire. Montrer que, pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $M_{\mathcal{B}}(\phi') = {}^tM_{\mathcal{B}}(\phi)$.*

Proposition 8. *L'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{BL}(E) & \to & M_n(\mathbb{K}) \\ \phi & \mapsto & M_{\mathcal{B}}(\phi) \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. Il en résulte que* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{BL}(E) = \dim_{\mathbb{K}} M_n(\mathbb{K}) = n^2$.

Démonstration. Notons Ψ cette application, qui est clairement linéaire.

Pour montrer qu'elle est injective, il (faut et il) suffit de montrer que son noyau est réduit à $\{0\}$. Soit $\phi \in \ker \Psi$. Pour tous éléments $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ de E, on a donc

$$\phi(x,y) = (x_1, \ldots, x_n) M_{\mathcal{B}}(\phi) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0$$

et donc $\phi = 0$.

Montrons la surjectivité. Considérons $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Alors l'application $\phi : E \times E \to \mathbb{K}$ définie, pour tous éléments $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ de E, par

$$\phi(x,y) = (x_1, \ldots, x_n) M \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

est bilinéaire et satisfait $\Psi(\phi) = M$. □

Exercice 9. *On considère* $E = \mathbb{R}^2$. *Montrer que* $\mathcal{B} = ((1,-1),(0,1))$ *est une base de* $\mathbb{R}$. *Déterminer l'unique forme bilinéaire* ϕ *de* E *telle que*

$$M_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Remarque 10. *On peut en fait interpréter* $M_{\mathcal{B}}(\phi)$ *comme la matrice d'une application linéaire de* E *dans son dual* E^*.

Voyons ce qui se passe lorsqu'on change de base.

Proposition 11 (Changement de base)**.** *Soit* $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ *une base de* E. *Notons* P *la matrice de changement de base de* $\mathcal{B}$ *vers* $\mathcal{B}'$[1]. *On a*

$$M_{\mathcal{B}'}(\phi) = {}^t P M_{\mathcal{B}}(\phi) P.$$

Démonstration. On part de deux vecteurs $x = \sum x_i e_i, y = \sum y_i e_i \in E$.

---

1. Si on note $e'_j = \sum_i p_{i,j} e_i$ alors $P = (p_{i,j}) \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{K})$ *i.e.* la $j$ème colone de P est constituée des coordonnées de e'_j dans la base $\mathcal{B}$.

On écrit x dans la base $\mathcal{B}'$: $x = \sum x'_i e'_i$. Par définition de P, on a $X = PX'$ où

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

De même, si $y = \sum_i y'_i e'_i$, on a $Y = PY'$ où

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ et } Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

Alors

$$\phi(u,v) = {}^tXM_{\mathcal{B}}(\phi)Y = {}^t(PX')M_{\mathcal{B}}(\phi)(PY') = {}^tX'({}^tPM_{\mathcal{B}}(\phi)P)Y'.$$

□

Exercice 12. *Reprendre l'exercice 9 en uilisant le résultat précédent.*

1.3. **Formes bilinéaires symétriques.** On considère dans cette section un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.

Définition 2. *Une forme bilinéaire ϕ sur E est dite symétrique si*

$$\forall x, y \in E, \phi(x,y) = \phi(y,x).$$

On notera $\mathcal{BLS}(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E.

Pour toutes formes bilinéaires symétriques ϕ, φ sur E et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\phi + \lambda\varphi$ est symétrique. En d'autres termes :

Proposition 13. *L'ensemble $\mathcal{BLS}(E)$ des formes bilinéaires symétriques sur E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{BL}(E)$.*

Démonstration. Facile. □

1.3.1. *Le cas de la dimension finie.* On suppose dans cette section que E est de dimension finie n. La symétrie de ϕ se traduit très simplement en termes de $M_{\mathcal{B}}(\phi)$. Rappelons qu'une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est dite symétrique si ${}^tM = M$.

Proposition 14. *Les assertions sont équivalentes :*
(i) la forme bilinéaire ϕ est symétrique ;
(ii) il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice $M_{\mathcal{B}}(\phi)$ soit symétrique ;
(iii) pour toute base $\mathcal{B}$ de E, la matrice $M_{\mathcal{B}}(\phi)$ est symétrique.

Démonstration. Supposons (i) et montrons (iii). Considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Alors, la symétrie de ϕ assure que $\phi(e_i, e_j) = \phi(e_j, e_i)$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$, ce qui signifie exactement que (iii) est vérifiée.

Le fait que (iii) implique (ii) est évident.

Supposons (ii) vérifiée et montrons (i). Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Pour tout $x = \sum x_i e_i, y = \sum y_i e_i \in E$, on a

$$\phi(x, y) = {}^t X M_{\mathcal{B}}(\phi) Y$$

où

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\phi(x, y) = {}^t\phi(x, y) = {}^t({}^t X M_{\mathcal{B}}(\phi) Y) = {}^t Y {}^t M_{\mathcal{B}}(\phi) X = {}^t Y M_{\mathcal{B}}(\phi) X = \phi(y, x).,$$

et (i) est donc vérifiée. □

Exercice 15. *Donner une preuve plus concise de ce résultat en utilisant l'exercice 7.*

Proposition 16. *Notons $S_n(\mathbb{K})$ le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ formé par les matrices symétriques. Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, l'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{BLS}(E) & \to & S_n(\mathbb{K}) \\ \phi & \mapsto & M_{\mathcal{B}}(\phi) \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Il en résulte que $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{BLS}(E) = \dim_K \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$.

1.4. **Formes bilinéaires anti-symétriques.**

Définition 3. *Une forme bilinéaire $\phi : E \times E \to \mathbb{K}$ est dite anti-symétrique si*

$$\forall x, y \in E, \phi(x, y) = -\phi(y, x).$$

On note $\mathcal{BLA}(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires anti-symétriques sur E.

Pour toutes formes bilinéaires anti-symétriques ϕ, φ sur E et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\phi + \lambda\varphi$ est symétrique. En d'autres termes :

Proposition 17. *L'ensemble $\mathcal{BLA}(E)$ des formes bilinéaires anti-symétriques un sous-espace vectoriel de $\mathcal{BL}(E)$.*

1.4.1. *Le cas de la dimension finie.*

On suppose dans cette section que E est de dimension finie n. L' anti-symétrie de ϕ se traduit très simplement en termes de $M_{\mathcal{B}}(\phi)$. Rappelons qu'une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est dite anti-symétrique si ${}^t M = -M$.

Proposition 18. *Les assertions sont équivalentes :*

(i) la forme bilinéaire ϕ est anti-symétrique ;
(ii) il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice $M_{\mathcal{B}}(\phi)$ soit anti-symétrique ;
(iii) pour toute base $\mathcal{B}$ de E, la matrice $M_{\mathcal{B}}(\phi)$ est anti-symétrique.

Proposition 19. *Notons $A_n(\mathbb{K})$ le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ formé par les matrices anti-symétriques. Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, l'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{BLA}(E) & \to & A_n(\mathbb{K}) \\ \phi & \mapsto & M_{\mathcal{B}}(\phi) \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Il en résulte que $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{BLA}(E) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}$.

1.5. **Bilin=sym+anti-sym.**

Proposition 20. *Pour toute forme bilinéaire ϕ sur E, il existe une unique forme bilinéaire symétrique ϕ_s sur E et une unique forme bilinéaire anti-symétrique ϕ_a sur E telles que $\phi = \phi_s + \phi_a$. On a*

$$\phi_s(x,y) = \frac{\phi(x,y)+\phi(y,x)}{2} \text{ et } \phi_a(x,y) = \frac{\phi(x,y)-\phi(y,x)}{2}.$$

Ainsi, l'espace vectoriel $\mathcal{BL}(E)$ est la somme directe de $\mathcal{BLS}(E)$ et de $\mathcal{BLA}(E)$:

$$\mathcal{BL}(E) = \mathcal{BLS}(E) \oplus \mathcal{BLA}(E).$$

1.6. **Formes quadratiques.**

Définition 4. *Une forme quadratique sur E est une application $q : E \to \mathbb{K}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire $\phi : E \times E \to \mathbb{K}$ vérifiant*

$$\forall x \in E, q(x) = \phi(x,x).$$

L'ensemble des formes quadratiques sur E est noté $\mathcal{Q}(E)$.

Pour toute forme bilinéaire ϕ sur E, on note

$$q_\phi : E \to \mathbb{K}$$

la forme quadratique définie par $q_\phi(u) = \phi(u,u)$.

Notons que, si q, q' sont des formes quadratiques sur E et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$q + \lambda q' : E \times E \to \mathbb{K}, x \mapsto q(x) + \lambda q'(x)$$

est un forme quadratique sur E. En termes plus formels, cela signifie que :

Proposition 21. *L'ensemble $\mathcal{Q}(E)$ des formes quadratiques sur E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ des applications de E dans $\mathbb{K}$.*

Exercice 22. *Montrer que l'application $\phi \mapsto q_\phi$ est linéaire.*

Exercice 23. *Montrer que les formes bilinéaires ϕ et ψ sur $E = \mathbb{R}^3$ défines par $\phi(x,y) = x_1y_1 + x_1y_3 - x_3y_1$ et $\varphi(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1$ sont distinctes mais telles que $q_\phi = q_\psi$. Ainsi, des formes bilinéaires distinctes peuvent conduire à une seule et même forme quadratique.*

Proposition 24. *Considérons une forme quadratique q sur E. Il existe une unique forme bilinéaire symétrique $\phi : E \times E \to \mathbb{K}$ telle que $q = q_\phi$. Celle-ci est appelée la forme polaire de q, notée ϕ_q et donnée par la formule suivante*

$$\phi_q(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right).$$

Démonstration. Soient q une forme quadratique sur E, et ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E telle que $q = q_\phi$. Pour tous $x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned} q(x+y) = \phi(x+y, x+y) &= \phi(x,x) + \phi(x,y) + \phi(y,x) + \phi(y,y) \\ &= \phi(x,x) + 2\phi(x,y) + \phi(y,y) = q(x) + 2\phi(x,y) + q(y). \end{aligned}$$

D'où l'égalité suivante

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right).$$

On vérifie que cette application possède les propriétés annoncées, d'où l'existence et l'unicité. $\square$

Proposition 25. *Pour toute forme quadratique q sur E, on a*

$$\{\psi \in \mathcal{BL}(E) \mid q_\psi = q\} = \phi_q + \mathcal{BLA}(E).$$

L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{BLS}(E) & \to & \mathcal{Q}(E) \\ \phi & \mapsto & q_\phi \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels d'application réciproque

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Q}(E) & \to & \mathcal{BLS}(E) \\ q & \mapsto & \phi_q. \end{array}$$

Démonstration. Considérons ψ une forme bilinéaire sur E telle que $q_\psi = q$. On décompose $\psi = \psi_s + \psi_a$ en ses parties symétriques et anti-symétriques. On a $q_\psi = q_{\psi_s} + q_{\psi_a} = q_{\psi_s}$ et il résulte de la la proposition précédente que $q_{\phi_q} = q_\psi$ si et seulement si $\psi_s = \phi_q$. $\square$

Exercice 26. *Montrer que le noyau de l'application linéaire $\phi \mapsto q_\phi$ est $\mathcal{BLA}(E)$, si bien que $q_\phi = q_\psi$ si et seulement si $\phi - \psi$ est anti-symétrique.*

En reprenant les notations de l'exercice 23, vérifier que la forme bilinéaire $\phi - \psi$ est effectivement alternée et déterminer ϕ_q

Remarque 27. *On rencontre parfois la définition suivante : une forme quadratique sur E est une application $q : E \to \mathbb{K}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire symétrique $\phi : E \times E \to \mathbb{K}$ vérifiant, $\forall u \in E, q(x) = \phi(x,x)$. Elle est bien équivalente à la nôtre d'après la Proposition 24.*

Exercice 28. *Soit q une forme quadratique sur E.*

Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $x \in E$, $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$.

Montrer que q vérifie la règle du parallélogramme : $q(x+y) + q(x-y) = 2q(x) + 2q(y)$.

Exercice 29. *Suposons E de dimension finie. La linéarité de $q \mapsto \phi_q$ jointe aux égalités*

$$\phi_{x_i^2} = x_i y_i \text{ et, plus généralement, } \phi_{x_i y_j} = \frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i)$$

est utile pour calculer des formes polaires.

Par exemple, calculons ϕ_q pour $E = \mathbb{R}^4$ et $q(x) = x_1^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 - 3x_3x_4 + 2x_1x_4$. On a $\phi_q = \phi_{x_1^2} - 2\phi_{x_3^2} + \phi_{x_1x_2} - 3\phi_{x_3x_4} + 2\phi_{x_1x_4} = x_1y_1 - 2x_3y_3 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) - \frac{3}{2}(x_3y_4 + x_4y_3) + (x_1y_4 + x_4y_1)$.

Calculer la forme polaire de $q(x) = \sum_{i \leq n} x_i^2 + \sum_{i \leq n-1} x_i x_{i+1}$.

Poursuivons avec un critère permattant de reconnaître les formes quadratiques.

Proposition 30. *Pour qu'une application $q : E \to \mathbb{K}$ soit une forme quadratique, il suffit qu'elle soit homogène de degré 2, et que l'application $E \times E \to \mathbb{K}$, $(x, y) \mapsto \frac{q(x+y)-q(x)-q(y)}{2}$ soit une forme bilinéaire.*

1.6.1. *En dimension finie.* Dans cette section, on suppose que E est de dimension finie n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Définition 5. *Soit q une forme quadratique sur E. La matrice $M_{\mathcal{B}}(q)$ de q relativement à une base $\mathcal{B}$ de E est par définition la matrice (symétrique) $M_{\mathcal{B}}(\phi_q)$ de sa forme polaire ϕ_q relativement à la base $\mathcal{B}$.*

Exemple 31. *Déterminons la matrice de la forme quadratique $q(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ sur $E = \mathbb{R}^2$ dans la base canonique $\mathcal{B}$. On a $\phi_q(x, y) = x_1y_1 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) + x_2y_2$. Donc*

$$M_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminons la matrice de la forme quadratique $q(x)$ dans la base $\mathcal{B}' = ((1,0), (1,1))$. Un calcul direct montre que

$$M_{\mathcal{B}'}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Retrouvons cela avec la formule du changement de base. La matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$M_{\mathcal{B}'}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Proposition 32. *Soit q une forme quadratique sur E. Pour tout élément $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ de E, on a*

$$q(x) = \phi(x,x) = \sum_{i,j} x_i x_j \phi(e_i, e_j) = (x_1, \ldots, x_n) M_{\mathcal{B}}(q) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Et $M_{\mathcal{B}}(\phi)$ est l'unique élément de $S_n(\mathbb{K})$ vérifiant cette propriété.

Démonstration. L'expression pour $q(x) = \phi(x,x)$ est une conséquence de la définition de $M_{\mathcal{B}}(\phi)$.

Prouvons la dernière assertion de la proposition. Soit $M \in S_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, on ait

$$q(x) = (x_1, \ldots, x_n) M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

L'application $\phi' : E \times E \to \mathbb{K}$ qui à $(x,y) = (\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i)$ associe

$$\phi'(x,y) = (x_1, \ldots, x_n) M \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

est une application bilinéaire symétrique et on a $M_{\mathcal{B}}(\phi') = M$. Notons q' la forme quadratique associée à ϕ'. Par hypothèse, on a $q = q'$.

Pour tout $x, y \in E$, on a

$$\phi(x,y) = \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2} = \frac{q'(x+y) - q'(x) - q'(y)}{2} = \phi'(x,y).$$

Donc $\phi = \phi'$, d'où $M_{\mathcal{B}}(\phi) = M_{\mathcal{B}}(\phi') = M$. □

Proposition 33. *L'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Q}(E) & \to & S_n(\mathbb{K}) \\ q & \mapsto & M_{\mathcal{B}}(q) \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Il en résulte que $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{Q}(E) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration. Cela résulte du fait que cette application est la composée des applications

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Q}(E) & \to & \mathcal{BLS}(E) \\ q & \mapsto & \phi_q \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{BLS}(E) & \to & S_n(\mathbb{K}) \\ \phi & \mapsto & Mat_{\mathcal{B}}(\phi) \end{array}$$

qui sont toutes les deux des isomorphismes de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. $\square$

Proposition 34 (Changement de base)**.** *Soit $\mathcal{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ une base de E. Notons P la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. On a*

$$M_{\mathcal{B}'}(q) = {}^tPM_{\mathcal{B}}(q)P.$$

Remarque 35. *Ce n'est PAS la même formule de changement de base que pour les endomorphismes !*

2. Un peu de dualité

Cette petite section est un complément utile qui éclaire les objets du cours, mais on n'en fait pas un point central.

Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Son dual $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est l'espace vectoriel formé des formes linéaires sur E *i.e.* des applications linéaires $E \to \mathbb{K}$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pout tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note e_i^* l'unique forme linéaire sur E telle que $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ *i.e.*, pour tout $x = \sum x_j e_j$,

$$e_i^*(x) = e_i^*\left(\sum x_j e_j\right) = x_i.$$

On considère alors $\mathcal{B}^* := (e_1^*, \ldots, e_n^*)$.

Proposition 36. *$\mathcal{B}^*$ est une base de E^*. On l'appelle la base duale de $\mathcal{B}$.*

Démonstration. Soit $f \in E^*$. Pour tout $x = \sum x_i e_i$, on a $f(x) = \sum f(e_i)x_i = \sum f(e_i)e_i^*(x)$ et donc $f = \sum f(e_i)e_i^*$. Ainsi $\mathcal{B}^*$ est génératrice. La liberté est laissée en exercice. $\square$

En particulier, E^* est de dimension finie, égale à la dimension de E. Ainsi, E et E^* sont isomorphes, mais il n'y a pas d'isomorphisme canonique a priori.

Dans l'autre sens :

Proposition 37. *Soit $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de E^*. Il existe une unique base $(f_1^\circ, \ldots, f_n^\circ)$ de E telle que $(f_i^\circ)^* = f_i$. On l'appelle la base antéduale de $\mathcal{C}$.*

Démonstration. L'équation $(f_i^\circ)^* = f_i$ équivaut à $f_i(f_j^\circ) = \delta_{i,j}$. Nous allons montrer que, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, le système d'équations suivant admet une unique solution $x \in E$ que l'on notera f_j° :

$$\begin{cases} f_1(x) = \delta_{1,j} \\ \ldots \\ f_n(x) = \delta_{n,j}. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de E. Notons

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$. Notons A la matrice carrée dont la i-ième ligne est la matrice (ligne) de f_i exprimée dans la base $\mathcal{B}$ et notons B_j le vecteur colonne avec des 0 partout sauf à la j-ème ligne, qui vaut 1.

Le système précédent équivaut à

$$AX = B_j.$$

C'est un système de Cramer : le fait que les f_i soient linéairement indépendants montre que les lignes de A sont linéairement indépendantes et donc que A est inversible. Il admet donc une unique solution, dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont données par $A^{-1}(B_j)$.

Les coordonnées des $f_i^o \in E$ dans $\mathcal{B}$ sont les images par A^{-1} de la base canonique de $\mathbb{R}^n$; ils forment donc une base de E. □

Dans la pratique : avec les notations de la preuve précédente, les coordonnées de f_j° dans la base $\mathcal{B}$ sont données par la $j$ème colone de A^{-1}.

Exemple 38. *Considérons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^2$ et les formes linéaires $f_1, f_2 \in E^*$ données par $f_1(x) = x_1 + x_2$ et $f_2(x) = x_1 - x_2$. Ces dernières sont linéairement indépendantes et forment donc une base de E^*. On considère $\mathcal{B}$ la base canonique de E. La matrices A de la proposition précédente est donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La base antéduale est donc donnée par $f_1^\circ = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $f_2^\circ = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

3. Orthogonalité par rapport à une forme bilinéaire symétrique

Dans cette section, ϕ désigne une forme bilinéaire symétrique sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et q la forme quadratique associée (ou, si l'on préfère, q est une forme quadratique et ϕ est sa forme polaire).

Définition 6. *Soient x, y des éléments de E. On dit que y est ϕ- ou q-orthogonal (ou, simplement, « orthogonal » si aucune confusion n'est à craindre) à x si $\phi(x, y) = 0$.*

Puisque ϕ est symétrique, on voit que x est orthogonal à y si et seulement si y est orthogonal à x (en d'autres termes, la relation d'orthogonalité est une relation binaire symétrique sur E ; par contre, elle n'est en général ni réflexive, ni transitive). On pourra donc dire sans ambiguité « x et y sont orthogonaux ».

Exemple 39.
— *Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^2$ et $\phi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$ le produit scalaire usuel, c'est la notion d'orthogonalité habituelle.*
— *Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^2$ et $\phi(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$, le vecteur (non nul) $(1, 1)$ est orthogonal à lui-même.*

— *Pour* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ *et* $\phi(f, g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$, *les fonctions* 1 *et* $\sin(x)$ *sont orthogonales.*

Définition 7. *Une famille* $(x_i)_{i\in I}$ *de vecteurs de* E *est dite*
- *orthogonale si, pour tout* $i, j \in I$, $i \neq j$, x_i *et* x_j *sont orthogonaux (c'est-à-dire* $\phi(x_i, x_j) = 0$*) ;*
- *orthonormée si, pour tout* $i, j \in I$, $\phi(x_i, x_j) = \delta_{i,j}$.

Définition 8. *Pour toute partie* A *de* E*, l'orthogonal de* A *est noté* $A^\perp$ *et défini par*

$$A^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in A, \phi(x, y) = 0\}.$$

Proposition 40. *L'othogonal vérifie les propriétés suivantes :*
- $\forall A \subset B \subset E$, $B^\perp \subset A^\perp$;
- $\forall A \subset E$, $A^\perp$ *est un sous-espace vectoriel de* E ;
- $\forall A \subset E$, $A^\perp = (Vect(A))^\perp$;
- $\forall A \subset E$, $A \subset (A^\perp)^\perp$.

Exercice 41. *Si* F *est un sous-espace vectoriel de* E *et si* $(e_i)_{i\in I}$ *est une famille génératrice de* F*, alors* $F^\perp = \{y \in E \mid \forall i \in I, \phi(e_i, v) = 0\}$.

Exercice 42. *Puisque* $(A^\perp)^\perp$ *est un sous-espace vectoriel de* E*, l'inclusion* $A \subset (A^\perp)^\perp$ *est stricte si* A *n'est pas un sous-espace vectoriel de* E*. Cette inclusion peut être stricte même lorsque* A *est un sous-espace vectoriel de* E *(il faut donc se méfier de l'intution développée avec le produit scalaire usuel sur* $\mathbb{R}^2$*). Considérons par exemple la forme quadratique* $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ *sur* $E = \mathbb{R}^3$ *et* $V = \mathbb{R}e_1$ *où* (e_1, e_2, e_3) *est la base canonique. Montrer que la forme polaire* ϕ *de* q *est donnée par* $\phi(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$*. Montrer que* $V^\perp = \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3$ *et que* $(V^\perp)^\perp = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_3$*. On a donc* $E = V \oplus V^\perp$ *mais* $(V^\perp)^\perp \neq V$.

Exercice 43. *Montrer que, si* x *et* y *sont orthogonaux, alors* $q(x+y) = q(x)+q(y)$.

Exercice 44. *Montrer que, pour la forme bilinéaire* ϕ *sur* $E = \mathbb{R}^2$ *dont la matrice dans une base* (e_1, e_2) *est* $\mathrm{diag}(1, -1)$*, le vecteur* $e_1 + e_2$ *est orthogonal à lui-même, mais pas nul. En particulier, on a que* $V = \mathbb{R}(e_1 + e_2)$ *et* $V^\perp$ *ne sont pas en somme directe.*

Montrer que le vecteur $e_1 - e_2$ *est orthogonal à lui-même mais pas à* $e_1 + e_2$.

Exercice 45. *Montrer que si* V *et* W *sont des sous-espace vectoriel de* E *alors* $(V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$ *et* $V^\perp + W^\perp \subset (V \cap W)^\perp$*. Montrer par un exemple que cette dernière inclusion peut être stricte.*

Définition 9. *On appelle* $E^\perp$ *le noyau de* ϕ *(ou de* q*).*

Définition 10. *On dit que* ϕ *(ou* q*) est non dégénérée si* $E^\perp = \{0\}$ *c'est-à-dire si sont noyau est* $\{0\}$*. Dans le cas contraire,* ϕ *(ou* q*) est dite dégénérée.*

Exemple 46.
- *Pour* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^2$ *et* $\phi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$ *le produit scalaire usuel, on a* $E^\perp = \{(0, 0)\}$ *et* ϕ *est donc non dégénérée.*

— *Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^3$ et $\phi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$. On a $E^\perp = \mathbb{R}e_3$ où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de E. Ainsi, ϕ est dégénérée.*

Exercice 47. *Attention si ϕ est non dégénérée sur E, sa restriction à un sous-espace vectoriel peut aussi bien être dégénérée que non dégénérée. Donnez des exemples.*

3.1. **Le cas de la dimension finie.** On suppose à présent E de dimension finie n et on considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E.

Définition 11. *On appelle rang de ϕ (ou de q) l'entier $n - \dim(E^\perp)$.*

Proposition 48. *La dimension du noyau $E^\perp$ de ϕ est égal à celui du noyau de $M_\mathcal{B}(\phi)$. Le rang de ϕ est égal au rang de la matrice $M_\mathcal{B}(\phi)$.*

Démonstration. On a $E^\perp = \{y \in E \mid \phi(\cdot, y) = 0\}$. Pour $y = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n \in E$, on a

$$\phi(\cdot, y) : E \to \mathbb{K}, x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \mapsto (x_1, \dots, x_n)M_\mathcal{B}(\phi)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

et donc $\phi(\cdot, y) = 0$ si et seulement si $M_\mathcal{B}(\phi)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0$ si et seulement si $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in$ $\ker M_\mathcal{B}(\phi)$. Ainsi, l'application

$$y = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

fournit un isomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire entre $E^\perp$ et $\ker M_\mathcal{B}(\phi)$. Par conséquent, on a $\dim(E^\perp) = \dim\ker M_\mathcal{B}(\phi)$, d'où la première assertion. La seconde en résulte en utilisant le théorème du rang. □

Il faut retenir de cette preuve que, pour tout élément $y = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$ de E, on a

$$y \in E^\perp \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \ker M_\mathcal{B}(\phi).$$

Exemple 49. *En utilisant le résultat peécédent, déterminer si les formes quadratiques suivantes sont dégénérées : $x_1^2 - x_2^2$ sur $\mathbb{R}^2$, $x_1^2 - x_2^2$ sur $\mathbb{R}^3$, $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ sur $\mathbb{R}^2$.*

On en déduit la caractérisation suivante du caractère non dégénéré.

Proposition 50. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
— *la forme bilinéaire ϕ est non-dégénérée ;*
— *la matrice $M_\mathcal{B}(\phi)$ est inversible.*

Démonstration. En effet, ϕ est on dégénérée si et seulement si $\dim(E^\perp) = 0$ si et seulement si le rang de ϕ vaut n si et seulement si le rang de $M_{\mathcal{B}}(\phi)$ vaut n si et seulement si $M_{\mathcal{B}}(\phi)$ est inversible. $\square$

Proposition 51. *Supposons ϕ non dégénérée et considérons un sous-espace vectoriel V de E. Alors,* $\dim V^\perp = n - \dim V$.

Démonstration. Notons $r = \dim V$. Donnons deux démonstrations de ce résultat.

Première démonstration. On a $V^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in V, \phi(x, y) = 0\}$. Pour tout $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ et tout $y = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$ dans E, on a

$$\phi(x, y) = (x_1, \dots, x_n)M_{\mathcal{B}}(\phi)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Notons

$$V' = \{(x_1, \dots, x_n)M_{\mathcal{B}}(\phi) \mid x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in V\};$$

c'est un sous-espace vectoriel de E de dimension r car $M_{\mathcal{B}}(\phi)$ est inversible. Avec ces notations, un élément $y = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$ de E appartient à $V^\perp$ si et seulement si

$$\forall (x'_1, \dots, x'_n) \in V', (x'_1, \dots, x'_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0.$$

Si on considère une base $L_1, \cdots, L_r$ de V' et si on note $A \in M_{r,n}(\mathbb{K})$ la matrice dont les lignes sont ces L_i, cette dernière propriété est équivalente à

$$A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0.$$

Ainsi, l'application

$$y = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

fournit un isomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire entre $V^\perp$ et $\ker A$. Or la matrice A est de rang r (ses lignes sont linéairement indépendantes), donc $\dim(V^\perp) = \dim \ker A = n - r$, d'où le résultat.

Seconde démonstration. L'application linéaire

$$F : E \to E^*, y \mapsto \phi(\cdot, y)$$

a pour noyau $E^\perp = \{0\}$ et est donc injective. Puisque E et E^* ont la même dimension $n < \infty$, on en déduit que F est un isomorphisme.

Considérons l'application linéaire

$$G : E^* \to V^*, f \mapsto f_{|V}.$$

Alors $V^\perp = \ker(G \circ F) = F^{-1}(\ker G)$. Puisque F est un isomorphisme, $\dim V^\perp = \dim \ker G$. Soit $(e'_1, \dots, e'_r)$ une base de V, que l'on complète en une base $(e'_1, \dots, e'_n)$ de E. Alors, $\ker G$ est engendré par $(e'_{r+1})^*, \dots, (e'_n)^*$ et est donc de dimension r. $\square$

Exercice 52. *Attention, V et $V^\perp$ ne sont en général pas en somme directe, même si ϕ est non dégénérée. Considérer par exemple la forme quadratique $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ sur $E = \mathbb{R}^2$ et $V = \mathbb{R}(1,1)$.*

Exercice 53. *Montrer que si E est de dimension finie, ϕ non dégénérée et si V est un sous-espace vectoriel de E alors $(V^\perp)^\perp = V$.*

3.2. **Vecteurs isotropes.** On ne suppose plus E de dimension finie.

Définition 12. *On dit qu'un élément u de E est un vecteur ϕ- ou q-isotrope (ou simplement « isotrope » si aucune confusion n'est à craindre) si $q_\phi(x) = \phi(x,x) = 0$.*

Exercice 54. *Les éléments de $E^\perp$ sont tous isotropes. Mais, en général, l'ensemble des vecteurs isotropes de E contient strictement $E^\perp$. Donner un exemple et un contre-exemple. Par exemple, la forme quadratique $x_1^2 - x_2^2$ sur $E = \mathbb{R}^2$ est non dégénérée mais l'ensemble de ses vecteurs isotropes est $\{(x, \pm x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. (L'égalité est néanmoins possible : la forme quadratique $x_1^2 + x_2^2$ sur $E = \mathbb{R}^2$ est non dégénérée et n'a pas de vecteur isotrope non nul.)*

Proposition 55. *L'ensemble des vecteurs isotropes est un cône, c'est-à-dire qu'il est stable par multiplication par n'importe quel élément de $\mathbb{K}$.*

Exercice 56. *Montrer par un exemple qu'en général l'ensemble des vecteurs isotropes de E n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Par exemple, l'ensemble des vecteurs isotropes de la forme quadratique $x_1^2 - x_2^2$ sur $E = \mathbb{R}^2$ est $\{(x, \pm x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, qui n'est pas un sous-espace vectoriel de E puisque $(1,-1) + (1,1) = (2,0) \notin E$.*

Exercice 57. *Dessiner le cône isotrope de la forme quadratique $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ sur $E = \mathbb{R}^3$.*

4. Réduction des formes quadratiques et applications

On considère E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et q une forme quadratique sur E de forme polaire notée ϕ.

Théorème 58. *Il existe une base orthogonale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E (c'est-à-dire une base formée de vecteurs deux à deux orthogonaux). Dans une telle base, la matrice de q est diagonale :*

$$M_{\mathcal{B}}(q) = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_{\mathrm{n}})$$

et donc, pour tout $x = \sum_i x_i e_i \in E$, on a

$$q(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2.$$

Si q est de rang r, la base $\mathcal{B}$ contient $n - r$ vecteurs isotropes qui forment une base de $E^\perp$.

Nous allons d'abord donner une première preuve assez rapide de ce résultat ; nous en donnerons ensuite une démonstration algorithmique (la méthode de Gauss).

Démonstration. Démontrons d'abord l'existence d'une base de E formée de vecteurs deux à deux orthogonaux par récurrence sur $n = \dim E$.

C'est évident si $n = 1$.

Soit $n \geq 1$ un entier. Supposons l'hypothèse de récurrence vraie jusqu'au rang $n-1$, et montrons qu'elle est vraie au rang n. Si $\phi = 0$, alors le résultat est évident. Nous pouvons donc supposer $\phi \neq 0$. On a donc $q \neq 0$ (sinon, on aurait $\phi(x, y) = \frac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y)) = 0$). Soit $e_1 \in E$ tel que $\phi(e_1, e_1) = q(e_1) \neq 0$. On considère $H = (\mathbb{K}e_1)^{\perp}$. Nous avons $E = \mathbb{K}e_1 \oplus H$. En effet, la somme est directe car un élément x dans l'intersection de $\mathbb{K}e_1$ et H est de la forme $x = \lambda e_1$ et vérifie $0 = \phi(e_1, x) = \phi(e_1, \lambda e_1) = \lambda\phi(e_1, e_1)$, donc $\lambda = 0$ et $x = 0$. Il reste à vérifier que H est de dimension $n - 1$; c'est une conséquence directe du fait que H est le noyau de la forme linéaire non nulle $\phi(e_1, \cdot) : E \to \mathbb{K}$. L'hypothèse de récurence appliquée à $q_{|H}$ assure qu'il existe une base $e_2, \ldots, e_n$ de H formée de vecteurs deux à deux orthogonaux. Alors, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ est une base de E formée de vecteurs deux à deux orthogonaux. Cela conclut la récurrence.

Le fait que la matrice de q dans cette base soit diagonale est évident, ainsi que la formule pour q.

Le rang de ϕ est égal au rang de la matrice diagonale $M_{\mathcal{B}}(q)$ c'est-à-dire au nombre de ses coefficients diagonaux non nuls c'est-à-dire au nombre de vecteurs non isotropes de cette base. Ainsi, si on note r le rang de q, cette base contient exactement $n-r$ vecteurs isotropes. Ces derniers forment une famille libre d'éléments de $E^{\perp}$. Par argument de dimension, c'est une base de $E^{\perp}$. $\square$

Corollaire 59. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il existe une base orthogonale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et un entier $r \geq 0$ tels que*

$$M_{\mathcal{B}}(q) = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, 0 \ldots 0)$$

avec r fois le coefficient 1, c'est-à-dire, tels que, pour tout $x = \sum_i x_i e_i \in E$,

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} x_i^2.$$

Corollaire 60. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il existe une base orthogonale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et des entiers $s, t \geq 0$ tels que*

$$M_{\mathcal{B}}(q) = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0 \ldots 0)$$

avec s fois le coefficient 1 et t fois le coefficient -1, c'est-à-dire, tels que, pour tout $x = \sum_i x_i e_i \in E$,

$$q(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} x_i^2.$$

Exercice 61. *Montrer qu'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E est une base orthogonale de E si et seulement si, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que, pour tout $x = \sum x_i e_i \in E$, on ait $q(x) = \sum \alpha_i x_i^2$.*

4.1. **D'une base orthogonale à une somme de carrés et réciproquement.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit q une forme quadratique sur E.

Supposons connue une base orthogonale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. On a donc, pour tout $x = \sum x_i e_i \in E$,

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i {x_i}^2$$

c'est-à-dire

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ell_i(x)^2$$

où $\ell_1 = (e_1)^*, \ldots, \ell_n = (e_n)^*$ sont des formes linéaires sur E linéairement indépendantes.

Réciproquement, supposons que l'on connaisse des formes linéaires $\ell_1, \ldots, \ell_n$ sur E linéairement indépendantes telles que, pour tout $x = \sum x_i e_i \in E$,

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ell_i(x)^2,$$

et montrons comment en déduire une base orthogonale de E. Considérons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n) := (\ell_1^\circ, \ldots, \ell_n^\circ)$ la base antéduale de la base $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ de E^*. On a donc $(e_i)^* = \ell_i$ et donc, pour tout $x = \sum x_i e_i \in E$, $\ell_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Ainsi, pour tout $x = \sum x_i e_i \in E$, on a $q(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2$. Il en résulte que $\mathcal{B}$ est orthogonale (cf. l'exercice 61).

Une dernière remarque avant de passer à la méthode de Gauss. Dans tous les cas, quitte à changer les notations, on peut supposer $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ non nuls et $\alpha_{r+1} = \cdots = \alpha_n = 0$. Alors r est le rang de q et

$$E^\perp = \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n) = \{x \in E \mid \ell_1(x) = \cdots = \ell_r(x) = 0\}.$$

4.2. **Méthode de Gauss.** On va maintenant montrer comment on peut effectivement décomposer une forme quadratique en somme de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes. Il s'agit de la méthode de Gauss.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit q une forme quadratique sur E donnée, pour tout $x = \sum_i x_i e_i$, par

$$q(x) = \sum_{i \leq j} a_{i,j} x_i x_j.$$

Avant de donner la méthode générale, traitons le cas $n = 2$, plus simple mais éclairant.

Supposons d'abord $a_{1,1} \neq 0$. On écrit

$$\begin{aligned} q(x) = a_{1,1}x_1^2 + a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2 &= a_{1,1}\left(x_1^2 + \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}x_1x_2\right) + a_{2,2}x_2^2 \\ &= a_{1,1}\left(x_1 + \frac{a_{1,2}}{2a_{1,1}}x_2\right)^2 + \left(a_{2,2} - \frac{a_{1,2}^2}{4a_{1,1}}\right)x_2^2 \end{aligned}$$

et on a bien décomposé $q(x)$ comme souhaité.

Le cas $a_{2,2} \neq 0$ est analogue.

Reste à traiter le cas $a_{1,1} = a_{2,2} = 0$. On a donc $q(x) = a_{1,2}x_1x_2$. On écrit alors

$$q(x) = \frac{a_{1,2}}{4}\left((x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2\right)$$

et on a à nouveau obtenu une décomposition de la forme souhaitée.

Revenons au cas général. Si $q = 0$, alors c'est terminé. Supposons à présent $q \neq 0$ et distinguons deux cas.

Cas 1 : Il existe i tel que $a_{i,i} \neq 0$. Quitte à renuméroter, on peut supposer que $i = 1$. On a

$$q(x) = a_{1,1}x_1^2 + x_1\sum_{j=2}^{n} a_{1,j}x_{1,j} + \sum_{2 \leq i \leq j} a_{i,j}x_ix_j.$$

Or

$$a_{1,1}x_1^2 + x_1\sum_{j=2}^{n} a_{1,j}x_{1,j} = a_{1,1}\left(\left(x_1 + \sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1,j}}{2a_{1,1}}x_j\right)^2 - \left(\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1,j}}{2a_{1,1}}x_j\right)^2\right)$$

Donc

$$q(x) = a_{1,1}\left(x_1 + \sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1,j}}{2a_{1,1}}x_j\right)^2 + q'(x_2, \dots, x_n),$$

où q' est une forme quadratique ne faisant pas intervenir x_1.

Cas 2 : Tous les coefficients $a_{i,i}$ sont nuls. Quitte à renumeroter, on peut supposer que $a_{1,2} \neq 0$. On rassemble tout ce qui concerne les indices 1 et 2 :

$$\begin{aligned} q(x_1, \dots, x_n) &= a_{1,2}x_1x_2 + \sum_{j>2} a_{1,j}x_1x_j + \sum_{j>2} a_{2,j}x_2x_j + \sum_{3 \leq i \leq j} a_{i,j}x_ix_j \\ &= a_{1,2}(x_1x_2 + x_1f(x_3, ..., x_n) + x_2g(x_3, ..., x_n)) + h(x_3, ..., x_n) \\ &= a_{1,2}(x_1+g(x_3, ..., x_n))(x_2+f(x_3, ..., x_n)) - a_{1,2}g(x_3, ..., x_n)f(x_3, ..., x_n) + h(x_3, ..., x_n) \\ &= a_{1,2}\ell_1'(x)\ell_2'(x) + q'(x_3, ..., x_n) \end{aligned}$$

On applique alors la formule

$$\ell_1'(x)\ell_2'(x) = \frac{1}{4}(\ell_1'(x) + \ell_2'(x))^2 - \frac{1}{4}(\ell_1'(x) - \ell_2'(x))^2$$

afin d'obtenir

$$\begin{aligned} q(x_1,\ldots,x_n) &= \frac{a_{1,2}}{4}(\ell'_1(x)+\ell'_2(x))^2 - \frac{a_{1,2}}{4}(\ell'_1(x)-\ell'_2(x))^2 + q'(x_3,...,x_n) \\ &= \frac{a_{1,2}}{4}\ell_1(x)^2 - \frac{a_{1,2}}{4}\ell_2(x)^2 + q'(x_3,...,x_n) \end{aligned}$$

avec $\ell_1(x) = \ell'_1(x) + \ell'_2(x)$ et $\ell_2(x) = \ell'_1(x) - \ell'_2(x)$.

Dans tous les cas, on est ramené à un problème similaire mais avec moins de variables. On applique alors la procédure à q', *etc.*

On laisse au lecteur le soin de démontrer que les formes linéaires ainsi obtenues sont linéairement indépendantes.

Université Grenoble Alpes