Corrigé du contrôle 1 (11 octobre 2021)

1. Soit
$$x_n = (-1)^n \big(\cos(1/n) + \sin(1/n) \big) \quad \text{pour } n \in \mathbf{N}.$$
Calculer $\limsup_{n\to\infty} x_n$ et $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

   Solution. On remarque que
$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} \cos(1/(2n)) + \sin(1/(2n)) = 1 \quad \text{et}$$
$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} -(\cos(1/(2n+1)) + \sin(1/(2n+1))) = -1,$$
d'où on conclut que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a deux points d'adhérence, à savoir 1 et -1, et que $\limsup_n x_n = 1$ et $\liminf_n x_n = -1$.

*****

2. Soit $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ la tribu Borélienne sur $\mathbf{R}$. Prouver ou réfuter les assertions suivantes
   (a) Si $A \in \mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ et $\lambda(A) = 0$ alors A est fermé.

   Solution. C'est faux. On peut considérer par exemple l'ensemble $\{1/n : n \in \mathbf{N}^*\}$ qui est borélien de mesure 0 (car dénombrable) mais qui n'est pas fermé (0 étant un point d'adhérence qui n'est pas dans l'ensemble).

   (b) L'ensemble $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ formé des unions finies d'intervalles ouverts de $\mathbf{R}$ est un clan.

   Solution. C'est faux. On va voir que $[0,\infty) = \mathbf{R} \setminus (-\infty, 0)$ n'est pas dans $\mathcal{C}$ ce qui montre que $\mathcal{C}$ n'est pas clos par complémentaire.
   En effet, supposons que $[0,\infty) = \bigcup_{i=0}^{n-1} (a_i, b_i)$ et sans perte de généralité, supposons que $a_0 = \min\{a_i : i < n\}$. Si $a_0 < 0$, alors $(a_0, b_0) \nsubseteq [0,\infty)$ et si $a_0 \geq 0$, alors $0 \notin \bigcup_i (a_i, b_i)$. Dans les deux cas on obtient une contradiction.

*****

3. Soit $X = \mathbf{N}$. Trouver la tribu sur X engendrée par $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbf{N})$ donné par
$$\mathcal{A} = \{\{p\}, \ \ p \text{ est un entier premier}\}.$$

   Solution. Soit $B = \{p \in \mathbf{N} : p \text{ est premier}\}$. Soit $\mathcal{B}_1 = \mathcal{P}(B)$ et $\mathcal{B}_2 = \{(\mathbf{N} \setminus B) \cup A : A \subseteq B\}$. On prétend que la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ est l'ensemble $\mathcal{T}_0 = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. D'abord on montre que $\mathcal{T}_0$ est une tribu. Le complémentaire de tout ensemble dans $\mathcal{B}_1$ est dans $\mathcal{B}_2$ et le complémentaire de tout ensemble dans $\mathcal{B}_2$ est dans $\mathcal{B}_1$, ce qui montre que $\mathcal{T}_0$ est clos par complémentaire. Soit maintenant $A = \bigcup_i A_i$ avec $A_i \in \mathcal{T}_0$ pour tout i. Si tout $A_i \in \mathcal{B}_1$, alors $A \in \mathcal{B}_1$ et s'il existe i tel que $A_i \in \mathcal{B}_2$, alors $A \in \mathcal{B}_2$. Ceci montre que $\mathcal{T}_0$ est également clos par des réunions arbitraires (en particulier dénombrables).

   Ensuite, supposons que $\mathcal{T}$ est une tribu qui contient $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{T}$ est close par réunions dénombrables, on obtient que $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}$ (tout élément de $\mathcal{B}_1$ étant une réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$). Enfin, tout élément de $\mathcal{B}_2$ est le complémentaire d'un élément de $\mathcal{B}_1$ et donc $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{T}$ aussi.

*****

4. Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction et soit $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $g(x) = \sin(f(x))$.
   (a) Est-il vrai que si f est borélienne alors g l'est aussi ?

   Solution. Oui, car la composition de deux fonctions boréliennes et borélienne.

   (b) Est-il vrai que si g est borélienne alors f l'est aussi ?

   Solution. Non. Soit $A \subseteq \mathbf{R}$ un ensemble non borélien et soit f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A, \\ \pi & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

   Alors $g(x) = 0$ pour tout x (et g est donc borélienne) mais f ne l'est pas (car $f^{-1}(\{0\}) = A$ est non borélien).

*****

5. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ et soit $A \subseteq \mathbf{R}$ un ensemble borélien. Soit f la fonction sur $\mathbf{R}^+$ définie par

$$f(x) = \lambda([0,x] \cap A) \quad \text{pour } x \in \mathbf{R}^+.$$

   (a) Montrer que f prend des valeurs finies pour tout $x \in \mathbf{R}^+$.

   Solution. On a, pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, que

$$f(x) = \lambda([0,x] \cap A) \leq \lambda([0,x]) = x < \infty.$$

   (b) Montrer que f est continue.

   Solution. On a, pour tout $x, y \in \mathbf{R}^+$ avec $x < y$, que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |\lambda([0,x] \cap A) - \lambda([0,y] \cap A)| \leq \lambda([0,y] \setminus [0,x]) \\ &= \lambda((x,y]) = y - x, \end{aligned}$$

   ce qui montre que f est continue (même uniformément).