Contrôle 1 (11 octobre 2021)

Durée : 45 minutes. Le polycopié du cours est autorisé, à l'exclusion de tout autre document, calculatrice...

1. Soit
$$x_n = (-1)^n\big(\cos(1/n) + \sin(1/n)\big) \quad \text{pour } n \in \mathbf{N}.$$
Calculer $\limsup_{n\to\infty} x_n$ et $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

*****

2. Soit $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ la tribu Borélienne sur $\mathbf{R}$. Prouver ou réfuter les assertions suivantes
   (a) Si $A \in \mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ et $\lambda(A) = 0$ alors A est fermé.
   (b) L'ensemble $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ formé des unions finies d'intervalles ouverts de $\mathbf{R}$ est un clan.

*****

3. Soit $X = \mathbf{N}$. Trouver la tribu sur X engendrée par $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbf{N})$ donné par
$$\mathcal{A} = \{\{p\},\ \ p \text{ est un entier premier}\}.$$

*****

4. Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction et soit $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $g(x) = \sin(f(x))$.
   (a) Est-il vrai que si f est borélienne alors g l'est aussi ?
   (b) Est-il vrai que si g est borélienne alors f l'est aussi ?

   (*Indciation :* Dans cet exercice on peut admettre l'existence de parties de $\mathbf{R}$ non boréliennes.)

*****

5. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ et soit $A \subseteq \mathbf{R}$ un ensemble borélien. Soit f la fonction sur $\mathbf{R}^+$ définie par
$$f(x) = \lambda([0,x] \cap A) \quad \text{pour } x \in \mathbf{R}^+.$$
   (a) Montrer que f prend des valeurs finies pour tout $x \in \mathbf{R}^+$.
   (b) Montrer que f est continue.