Contrôle 2 (9 novembre 2021)

Durée : 1 heure. Aucun document n'est autorisé, calculatrice non autorisée

Questions de cours

1. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f\colon X \to \overline{\mathbf{R}}$ une fonction mesurable.
   — Si f est positive (c'est-à-dire $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in X$) donner la définition de l'intégrale de f par rapport à μ : $\int_X f(x) d\mu(x)$. (En supposant que la définition de l'intégrale des fonctions étagées est connue).
   — Lorsque f n'est pas forcément positive, définir $\int_X f(x) d\mu(x)$ et dire quand elle bien définie (au sens de l'intégrale de Lebesgue). Définir la notion "f est intégrable".
2. Enoncer le théorème de convergence monotone

*****

Exercices.

3. Montrer que les intégrales suivantes sont bien définies et calculer la limite
$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{n \sin(x/n)}{x^3} dx$$
4. Soit P une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}$ (muni de la tribu Borélienne $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$). Montrer que les intégrales suivantes sont bien définies et calculer la limite.
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{1+n|x|} dP(x)$$
5. Montrer que la série
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+n^2} \right)^s$$
est convergente pour $s \in]\frac{1}{2}, +\infty[$. On note $K(s)$ la somme de cette série. Montrer que la fonction $s \to K(s)$ est continue sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$. Calculer $\lim_{s\to\frac{1}{2}} K(s)$.
6. Dans chacun des cas suivants, dîtes (et justifier en appliquant les résultats du cours et les règles de convergence des intégrales généralisées) si : f est intégrable, respectivement l'intégrale au sens de Lebesgue est bien définie (c'est-à-dire f admet une intégrale), sur l'intervalle I, par rapport à la mesure de Lebesgue.
   — $I =]0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
   — $I =]0, \infty[$, $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.
   — $I =]0, \infty[$, $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$.