# Corrigé contrôle 2 (9 novembre 2021)

**Questions de cours**

1. Cf cours, Definition 6.5 et 6.8.
2. Cf cours Théorème 6.25.

*****

**Exercices.**

3. Fait en TD, feuille 3, exo 12.

4. Soit $P$ une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}$ (muni de la tribu Borélienne $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$). Montrer que les intégrales suivantes sont bien définies et calculer la limite.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{1+n|x|}dP(x)$$

*Solution*. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on note

$$f_n(x)=\frac{1}{1+n|x|}$$

Alors $x \to f_n(x)$ est continue donc mesurable. De plus $0 \leq f_n(x) \leq 1$. Comme $P$ est une mesure de probabilité, on a

$$\int_{\mathbf{R}}|f_n(x)|\,dP(x)\leq\int_{\mathbf{R}}dP(x)=P(\mathbf{R})=1$$

donc $f_n$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ par rapport à $P$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On va appliquer la convergence dominée : on a vu précédemment que $|f_n(x)| \leq 1$ et 1 est intégrable car $P$ est une probabilité. De plus, on a

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1, & \text{si } x=0\\ 0 & \text{si } x\neq 0\end{cases}=\mathbb{1}_{\{0\}}(x).$$

Par le théorème de convergence dominée on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}}f_n(x)dP(x)=\int_{\mathbf{R}}\mathbb{1}_{\{0\}}(x)dP(x)=P(\{0\}).$$

5. Montrer que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+n^2}\right)^s$$

est convergente pour $s \in ]\frac{1}{2},+\infty[$. On note $K(s)$ la somme de cette série. Montrer que la fonction $s \to K(s)$ est continue sur $]\frac{1}{2},+\infty[$. Calculer $\lim_{s\to\frac{1}{2}}K(s)$.

*Solution.* Les termes de la série étant positifs, et comme $\left(\frac{1}{1+n^2}\right)^s \sim n^{-2s}$ lorsque $n \to \infty$, par les règles de convergence des séries on sait que la série $K(s)$ est convergente pour $s > \frac{1}{2}$.

Soit $\mu$ la mesure de comptage sur **N** et $f(n,s) = \left(\frac{1}{1+n^2}\right)^s$, on a

$$K(s) = \int_{\mathbf{N}} f(n,s) d\mu(n).$$

Soit $\epsilon > 0$, on va appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres sur $]\frac{1}{2}+\epsilon, +\infty[$. On voit que $s \to f(n,s)$ est continue, et $n \to f(n,s)$ mesurable (forcément car tribu complète sur **N**). On a la domination suivante pour $s \in ]\frac{1}{2}+\epsilon, +\infty[$ :

$$|f(n,s)| \leq \left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}+\epsilon}.$$

qui est intégrale sur **N** (vu plus haut). Donc $\forall \epsilon > 0$, $s \to K(s)$ est continue sur $]\frac{1}{2}+\epsilon, +\infty[$, donc continue sur $\cup_{\epsilon>0}]\frac{1}{2}+\epsilon, +\infty[=]\frac{1}{2}, +\infty[$.

Soit $s_k$ suite décroissante, $s_k > \frac{1}{2}$ et $\lim_{k\to\infty} s_k = \frac{1}{2}$. En notant $g_k(n) = f(n, s_k)$, on voit que $g_k(n)$ est une suite croissante de fonctions (car $\frac{1}{1+n^2} \leq 1$) et

$$\lim_{k\to\infty} g_k(n) = \left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par le théorème de convergence monotone (appliqué à la suite de fonctions $g_k(n)$ et à la mesure de comptage sur **N**), on a

$$\lim_{k\to\infty} K(s_k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} g_k(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = +\infty.$$

la dernière égalité venant du fait que $\left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{n}$ qui est une série divergente. Donc $\lim_{s\to\frac{1}{2}} K(s) = +\infty$

6. Dans chacun des cas suivants, dîtes (et justifier avec les résultats du cours et les règle de convergence des intégrales généralisées) si : $f$ est intégrable, respectivement l'intégrale au sens de Lebesgue est bien définie (c'est-à-dire $f$ admet une intégrale), sur l'intervalle $I$, par rapport à la mesure de Lebesgue.
   — $I = ]0,1]$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
   — $I = ]0,\infty[$, $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.
   — $I = ]0,\infty[$, $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$.

   *Solution.* 1er cas : $f$ est positive et continue. De plus l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ est absolument convergente. Par résultat du cours, on en déduit que $f$ est intégrable sur $I$.

   2ème cas. On a $f_+(x) = \mathbb{1}_{[1,\infty[}(x) f(x)$. De plus, par règle de Bertrand $\int_1^\infty f(x)dx = +\infty$, donc $\int_I f_+ = +\infty$ (au sens de l'intégrale de Lebesgue). De même $f_-(x) = -\mathbb{1}_{]0,1]}(x) f(x)$. Par règle de Bertrand on a $\int_I f_- = +\infty$. Donc $f$ n'admet pas d'intégrale au sens de Lebesgue sur $I$ (en particulier n'est pas intégrable).

   3ème cas. On a $f_+(x) = \mathbb{1}_{[1,\infty[}(x) f(x)$. De plus, par règle de Bertrand $\int_1^\infty f(x)dx < +\infty$, donc $\int_I f_+ < +\infty$. De même $f_-(x) = -\mathbb{1}_{]0,1]}(x) f(x)$. Par règle de Bertrand on a $\int_I f_- = +\infty$. Donc $f$ n'est pas intégrable mais admet une intégrale au sens de Lebesgue sur $I$ (et on a $\int_I f = -\infty$).