Ex 2: On pose $g(t,x) = e^{itx} f(x)$. Alors $|g(t,x)| = |f(x)|$.

Par hypothèse $f$ est intégrable, donc aussi $g(t,\cdot)$.

D'où $\hat{f}(t)$ est bien définie.

$t \mapsto g(t,x)$ est continue $\forall x$

$x \mapsto g(t,x)$ est mesurable pour tout $t$

car c'est un produit d'une fonction continue $x \mapsto e^{itx}$ avec une fonction mesurable $f(x)$. Comme

$|g(t,x)| \leq |f(x)|$ et $|f(x)|$ est intégrable, le thm de la continuité donne que $t \mapsto \hat{f}(t) = \int g(t,x)\,dx$ est continue.

Ex3

$[0,1] \times ]0,+\infty]$ est un borélien.

$g(x,y) = e^{-\frac{y}{x}} \dfrac{1}{1+x^2}$ est mesurable, car continue,

et positive sur $]0,1] \times ]0,+\infty]$. $\{0\} \times ]0,+\infty]$ est

négligeable. On peut appliquer le thm de Tonelli

$$\int_{[0,1]\times]0,+\infty]} g(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y}{x}} \frac{1}{1+x^2}\,dy\,dx = \int_0^1 -x\,e^{-\frac{y}{x}}\Big|_0^{+\infty} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 .$$

Ex 4 $\quad f(x,y) = y^2 x$ est mesurable sur le borélien $B$.

On fait un changement de variable

$$\phi : ]0,1] \times [0, \tfrac{\pi}{2}] \longrightarrow B \setminus \{0,0\}$$

$$\phi(r,\varphi) = (a r \cos\varphi, b r \sin\varphi)$$

$\phi$ est un $C^1$-difféo.

$$|J_\phi| = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ra\sin\varphi \\ b\sin\varphi & rb\cos\varphi \end{vmatrix} = rab > 0$$

sur $]0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

D'où $\displaystyle\int_B y^2 x \, dx\, dy = \int_{]0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]} r^3 a^2 b \cos^2\varphi \sin\varphi \, rab \, dr\, d\varphi$

$$= a^3 b^2 \int_0^1 r^4 \, dr \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi$$

changement de var: $z = \cos\varphi$ , $\dfrac{dz}{d\varphi} = -\sin\varphi$

$$= \frac{a^3 b^2}{5} \int_0^1 z^2 \, dz = \frac{a^3 b^2}{15}$$

Ex 5 : 1) $t \mapsto e^{-t^2}$ est cont., $[0,x]$ compacte. Donc

$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ bien défini (intégrale de Riemann).

Thm de Leibniz-Newton implique que $f$ est $C^1$ et

$f'(x) = e^{-x^2}$. Donc $F'(x) = 2f'(x)f(x)$ est continue.

Donc $F$ est $C^1$

Soit $g(t,x) = \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$. $t \mapsto g(t,x)$ est cont. donc mesurable pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$x \mapsto g(t,x)$ est $C^1$ pour tout $t \in [0,1]$.

$$\frac{\partial}{\partial x} g(t,x) = -2x\, e^{-x^2} e^{-x^2 t^2}$$

Donc $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(t,x)\right| \leq 2x e^{-x^2} \leq \max_{x \geq 0} 2x e^{-x^2} =: M < +\infty$

car $x \mapsto x e^{-x^2}$ est continue et $\lim_{x \to +\infty} x e^{-x^2} = 0$.

$t \mapsto M$ est intégrable sur $[0,1]$.

D'après le thm de la différentiation. $G(x)$ est $C^1$.

(2) Avec le changement de variable $y = xt$

$$G'(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(t,x)\,dt = -2x e^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt = -2 e^{-x^2} \int_0^x e^{-y^2} dy$$

$= F'(x)$ D'où $G' + F' = 0$.

$F(0) = 0$, $G(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

D'où $F(x) + G(x) = F(0) + G(0) = \frac{\pi}{4}$

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \frac{\pi}{4} - \lim_{x \to +\infty} G(x)$

$|g(t,x)| \leq 1$, $1$ est intégrable sur $[0,1]$. D'après le thm de la conv. dominée $\lim_{x \to +\infty} G(x) = \int_0^1 \lim_{x \to +\infty} g(t,x)\, dt$

$$\lim_{x \to +\infty} g(t, x) = 0 \quad \forall t, \quad \text{D'où} \quad \lim_{x \to +\infty} G(x) = 0.$$

$$\text{D'où} \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \circ$$