

Contrôle 3 (22 novembre 2021)

Durée : 1 heure. Aucun document n'est autorisé, calculatrice non autorisée

Questions de cours

1. Énoncer les théorèmes de Tonelli et Fubini (résultats permettant de relier l'intégrale par rapport à la mesure produit et les intégrales itérées – énoncer les deux hypothèses de validité de ces résultats).

Exercices.

2. Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction Borélienne intégrable sur \mathbf{R} . Montrer que la fonction

$$t \mapsto \hat{f}(t) := \int_{\mathbf{R}} e^{-itx} f(x) dx$$

est bien définie et continue sur \mathbf{R} .

3. Calculer l'intégrale suivante

$$\int_{[0,1] \times]0,\infty[} \exp(-y/x) \frac{1}{1+x^2} dx dy.$$

4. Soit $a, b > 0$ et $B := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. Déterminer

$$\int_B x^2 y dx dy.$$

5. Pour $x \geq 0$, soient $F(x) := \left(\int_0^x \exp(-t^2) dt\right)^2$ et $G(x) := \int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2} dt$.
 - (a) Montrer que F et G sont de classe C^1 sur \mathbf{R}_+ .
 - (b) Calculer $F'(x) + G'(x)$ pour $x \geq 0$.
 - (c) En déduire la valeur de $\int_0^\infty \exp(-t^2) dt$.