# Contrôle terminal (7 janvier 2022)

Durée : 3 heures. Aucun document n'est autorisé, calculatrice non autorisée

*Rappel et notations.*

— *On notera $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ (on note aussi souvent simplement $dx$ pour $\lambda(dx)$). On rappelle qu'une fonction est dite Borélienne si elle est mesurable pour la tribu Borélienne de $\mathbf{R}$.*

— *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Si $f$ est une fonction mesurable sur $X$ à valeurs réelles ou complexes, on note $\|f\|_{L^p}$ sa norme $L^p$, pour $1 \leq p \leq \infty$ (on rappelle que pour $p < \infty$, $\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f(x)|^p \mu(dx)\right)^{1/p}$). On note $L^p(X)$ l'espace $L^p$ sur $(X, \mathcal{T}, \mu)$. Par abus de notations (utilisé dans le cours et les TD) on dira qu'une fonction mesurable $f$ est dans $L^p(X)$ si $\|f\|_{L^p} < \infty$. Si $I$ est un intervalle de $\mathbf{R}$, implicitement $L^p(I)$ sera compris pour la tribu Borélienne sur $I$ et la mesure de Lebesgue sur $I$.*

— *On rappelle que si $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction $2\pi$-périodique, intégrable sur $[-\pi, \pi[$, ses coefficients de Fourier sont donnés par la formule $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$, pour tout $n \in \mathbf{Z}$.*

— *On rappelle que si $f$ est une fonction dans $L^1(\mathbf{R})$ à valeurs réelles ou complexes, sa transformée de Fourier est définie par $\hat{f}(x) = \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-ixt} dt$.*

**Partie I : questions de cours et d'application du cours**

1. Quelle propriété possède la limite d'une suite de fonctions mesurables qui converge en tout point (donner un énoncé précis).

   Application. Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue et dérivable en tout point de $\mathbf{R}$. Justifier ou réfuter l'assertion suivante : la dérivée $f'$ est Borélienne.

2. Enoncer l'inégalité de Hölder (qui permet de majorer la norme $L^1$ d'un produit de deux fonctions).

   Application : soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < \infty$. Montrer que pour $1 \leq p \leq q \leq \infty$ et $f$ une fonction mesurable, on a $\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^q} (\mu(X))^{1/p - 1/q}$.

3. Enoncer l'identité de Parseval (qui relie la norme $L^2$ d'une fonction sur $[0, 2\pi[$ avec ses coefficients de Fourier).

   Application : justifier ou réfuter l'assertion suivante : il existe une fonction dans $L^2([0, 2\pi[)$ dont les coefficients de Fourier $(c_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ vérifient $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} c_n = 1$.

4. Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, données par $f_n(t) = \chi_{[n,n+1[}(t) e^{n-t}$ (où $\chi_{[n,n+1[}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[n, n+1[$). Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n d\lambda - \int_{\mathbf{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n d\lambda.$$

   Expliquer pourquoi le théorème de convergence dominée ne s'applique pas.

**Partie II : exercices**

5. Soit $a, b$ deux réels tels que $0 < a < b < \infty$. Soit $f\colon ]0,\infty[\times[a,b] \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = \exp(-xy)$. En calculant de deux façon différentes $\int_{]0,\infty[\times[a,b]} f(x,y)dxdy$, calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$$

6. Soit $\alpha$ un réel tel que $\alpha > 0$. Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ la fonction définie par l'intégrale

$$f(x) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} e^{-itx} dt$$

   (a) Justifier que $f$ est bien définie. Montrer que $f$ est continument dérivable et calculer sa dérivée $f'$ sous la forme d'une intégrale.

   (b) En faisant une intégration par partie montrer que $f'(x) = -\frac{i\alpha}{1+ix} f(x)$.

   (c) Montrer que

$$f(x) = C(1+x^2)^{-\frac{1}{2}\alpha} \exp(-i\alpha \arctan(x))$$

   où $C$ est une constante qu'on explicitera avec la fonction Gamma. (On rappelle la valeur de la fonction Gamma : $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$, pour $z > 0$).

   (d) Montrer que si $\alpha > \frac{1}{2}$ la fonction $f$ est dans $L^2(\mathbf{R})$. Expliquer aussi cette proriété par un résultat du cours en interprétant $f$ comme la transformée de Fourier d'une fonction que l'on explicitera. Pour $\alpha > \frac{1}{2}$, calculer la transformée de Fourier de $f$.

7. Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction $2\pi$ périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = \exp(x)$.

   (a) Calculer les coefficients de Fourier de $f$.

   (b) Trouver la valeur de la série de Fourier de $f$ en tout point de $[-\pi, \pi[$ (soyez précis sur le théorème que vous utilisez).

   (c) En déduire la valeur de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+n^2}$.

8. Soit A un Borélien de $\mathbf{R}$ tel que $\lambda(A) > 1$. Pour $n \in \mathbf{Z}$ on note $A - n = \{x - n,\ x \in A\}$.

   (a) Montrer que $\lambda(A) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \lambda((A-n) \cap [0,1[)$.

   (b) En déduire que les ensembles $(A-n) \cap [0,1[$, $n \in \mathbf{Z}$, ne peuvent pas être deux à deux disjoints.

   (c) En déduire qu'il existe $a, b \in A$ tels que $a - b$ est un entier non nul.