Contrôle terminal (7 janvier 2022)

Eléments de corrigé

Partie I : questions de cours et d'application du cours

1. Cours et fait en TD.

2. Cours et fait en TD.

3. Application : Non c'est faux. Par Parseval on sait que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f|^2 = \sum_{n\in\mathbf{Z}}|c_n(f)|^2$. Sous l'hypothèse de l'énoncé on a que $|c_n|^2 \sim \frac{1}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Donc la série $|c_n|^2$ est divergente. Ainsi $\|f\|_{L^2([0,2\pi[)} = \infty$ et f n'est pas dans L^2.

4. Par calcul, on a que $\int_{\mathbf{R}} f_n(t)dt = \int_n^{n+1} e^{n-t}dt = (1-\frac{1}{e})$. D'autre part, pour tout $x \in \mathbf{R}$, il existe un entier n_0 tel que $f_n(x) = 0$ pour $n \geq n_0$. On a donc $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ $\forall x \in \mathbf{R}$. Donc
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbf{R}} f_n d\lambda - \int_{\mathbf{R}}\lim_{n\to+\infty} f_n d\lambda = 1 - \frac{1}{e} > 0.$$
Le théorème de convergence dominée ne s'applique pas sinon on aurait 0. Et en effet, on voit qu'il est impossible de trouver une fonction intégrable qui domine la suite f_n : on remarque que pour $x \in [n, n+1[$, $f_n(x) \geq \frac{1}{e}$, donc $sup_n|f_n(x)| \geq \frac{1}{e}\chi_{\mathbf{R}_+}$ qui n'est pas intégrable. (On ne peut pas non plus dominer la suite des fonctions à partir d'un certain rang, pour une raison similaire.)

Partie II : exercices

5. Soit $I = \int_{]0,\infty[\times[a,b]} f(x,y)dxdy$. La fonction f étant positive mesurable (car continue) sur son domaine, on peut appliquer le théorème de Tonelli, et chacune des intégrales ci-dessous ont a un sens comme intégrales de Lebesgue. On a donc
$$I = \int_0^\infty \left(\int_a^b \exp(-xy)dy\right)dx = \int_0^\infty \frac{1}{x}\left(e^{-ax} - e^{-bx}\right)dx.$$
D'autre part, en intégrant d'abord sur la variable x, on obtient par calcul élémentaire,
$$I = \int_a^b \left(\int_0^\infty \exp(-xy)dx\right)dy = \int_a^b \frac{1}{y}dy = \ln(b) - \ln(a).$$
qui est donc la valeur de l'intégrale demandée.

6. (a) Soit $g(t,x) = t^{\alpha-1}e^{-t}e^{-itx}$. On peut dominer g par $|g(x,t)| = h(t) := t^{\alpha-1}e^{-t}$, pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbf{R}$. On a $h(t) \sim t^{\alpha-1}$ lorsque $t \to 0$. Comme $h(t)$ est positive, par critère de Riemann car $\alpha - 1 > -1$, on sait que h est intégrable sur $[0,1]$. De plus par comparaison on sait que $h(t) =$

$o(e^{-t/2})$ lorsque $t \to \infty$ (car $t^{\alpha-1} = o(e^{t/2})$). Donc h est intégrable sur $[1, \infty[$. Donc $t \to g(t, x)$ est intégrable sur $]0, \infty[$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

D'autre part, $g(x, t)$ est clairement C^∞ en la variable x et $\frac{\partial}{\partial x} g(x, t) = -it^\alpha e^{-t} e^{-itx}$, que l'on peut dominer comme suit :

$$|\frac{\partial}{\partial x} g(x, t)| \leq h_1(t) := t^\alpha e^{-t}, \quad \forall t > 0, \ x \in \mathbf{R}.$$

(qui ne dépend pas de x). La fonction h_1 se prolonge continument en 0 et est intégrable en $+\infty$ pour la même raison que h. On peut donc appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres et f est C^1 et

$$f'(x) = -i \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} e^{-itx} dt.$$

(b) Par intégration par partie avec $u = t^\alpha$ et $v' = e^{-t(1+ix)}$, on obtient,

$$\int_0^\infty t^\alpha e^{-t} e^{-itx} dt = \left[\frac{-1}{1+ix} t^\alpha e^{-t} e^{-itx} \right]_0^\infty + \frac{\alpha}{1+ix} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} e^{-itx} dt.$$

Comme $\lim_{t\to\infty} |t^\alpha e^{-t} e^{-itx}| = \lim_{t\to\infty} t^\alpha e^{-t} = 0$ et $\lim_{t\to 0} t^\alpha e^{-t} e^{-itx} = 0$, le premier terme est nul, et donc

$$f'(x) = \frac{-i\alpha}{1+ix} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} e^{-itx} dt.$$

(c) On constate que f est solution de l'équation différentielle linéaire $f'(x) = a(x) f(x)$, avec $a(x) = \frac{-i\alpha}{1+ix}$ qui est une fonction continue sur $\mathbf{R}$. Donc cette ED admet une unique solution de la forme

$$f(x) = f(0) \exp\left(\int_0^x a(y) dy \right).$$

On voit que $a(x) = \frac{-i\alpha(1-ix)}{1+x^2} = -i\alpha \frac{1}{1+x^2} - \alpha \frac{x}{1+x^2}$. On reconnait des dérivées classiques et $\int_0^x a(x) dx = -\frac{1}{2}\alpha \ln(1+x^2) - i\alpha \arctan(x)$. Comme $f(0) = \Gamma(\alpha)$, on a le résultat.

(d) On a $|f(x)| = \Gamma(\alpha)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}\alpha}$ donc lorsque $x \to \pm\infty$, $|f(x)|^2 \sim \Gamma(\alpha)^2 |x|^{-2\alpha}$ qui est intégrable en $\pm\infty$ par critère de Riemann car $2\alpha > 1$. Comme $|f|^2$ est positive et continue sur $\mathbf{R}$, cela donne $\int_{\mathbf{R}} |f|^2 < \infty$, donc f est dans $L^2(\mathbf{R})$.

Soit $g(t) = t^{\alpha-1} e^{-t} \chi_{]0,\infty[}(t)$ alors g est dans $L_1(\mathbf{R})$ (cf a)) et par définition $\hat{g} = f$. Par théorème de Plancherel on sait que $\|f\|_{L^2} = \sqrt{2\pi} \|g\|_{L^2}$. Par les même arguments qu'en a), on peut en effet vérifier que g est dans $L^2(\mathbf{R})$ pour $\alpha > \frac{1}{2}$. Comme f et g sont dans L^2 on peut utiliser le théorème d'inversion de Fourier (pour la transformée de Fourier des fonctions L^2 définie comme extension de la transformée sur $L^1 \cap L^2$). On obtient

$$\hat{f}(t) = \hat{\hat{g}}(t) = 2\pi g(-t) = 2\pi |t|^{\alpha-1} e^{-|t|} \chi_{]\infty,0[}(t).$$

7. (a) En utilisant la 2π-périodicité, par résultat du cours, on peut calculer les coefficients de Fourier sur toute période, donc on a par calcul direct

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(x - inx)dx = \frac{1}{1-in}(-1)^n\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} = \frac{(-1)^n}{1-in}\frac{\sinh(\pi)}{\pi},$$

ceci car $e^{\pm in\pi} = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

(b) La fonction f étant C^1 par morceaux on peut appliquer la théorème de Dirichlet et donc la série de Fourier, notée Sf, converge simplement en tout point et $Sf(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$. Comme f est continue sur $]-\pi,\pi[$, on a $Sf(x) = e^x$ sur $]-\pi,\pi[$. Comme $f(-\pi^+) = e^{-\pi}$ et $f(-\pi^-) = f(\pi^-) = e^{\pi}$ (par périodicité), on a $Sf(-\pi) = \cosh(\pi)$.

(c) On a par b), $Sf(-\pi) = \cosh(\pi)$. D'autre part

$$\begin{aligned} Sf(-\pi) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{-in\pi} = \sum_{n\in\mathbf{Z}}(-1)^n c_n \\ &= \frac{\sinh(\pi)}{\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\frac{1}{1-in} \\ &= \frac{\sinh(\pi)}{\pi}\left(1 + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{1-in} + \frac{1}{1+in}\right) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi}\left(1 + 2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{1+n^2}\right) \end{aligned}$$

Au final on obtient, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2}(\pi\coth(\pi) - 1) = \frac{\pi\cosh(\pi)-\sinh(\pi)}{2\sinh(\pi)}$.
Remarque : on aurait aussi pu appliquer l'identité de Parseval, ça marche.

8. (a) On sait que $([n,n+1[)_{n\in\mathbf{Z}}$ forme une partition dénombrable de $\mathbf{R}$, on a donc

$$A = \sqcup_{n\in\mathbf{Z}} A \cap [n,n+1[,$$

Par additivité dénombrable, on a $\lambda(A) = \sum_{n\in\mathbf{Z}}\lambda(A\cap[n,n+1[)$. D'autre part, $(A-n)\cap[0,1[= (A\cap[n,n+1[) - n$, et par invariance par translation de la mesure de Lebesgue, on a $\lambda(A\cap[n,n+1[) = \lambda((A-n)\cap[0,1[)$. Ceci conclut la preuve.

(b) Supposons que les ensembles $(A-n)\cap[0,1[$, $n \in \mathbf{Z}$, soient deux à deux disjoints. Par additivité dénombrable on aurait

$$\lambda(A) = \sum_{n\in\mathbf{Z}}\lambda((A-n)\cap[0,1[) = \lambda(\sqcup(A-n)\cap[0,1[) \leq \lambda([0,1[) = 1$$

car $\sqcup(A-n)\cap[0,1[\subset[0,1[$. Hors $\lambda(A) > 1$ par hypothèse.

(c) Par b) on peut trouver n et m entiers distincts et $x \in (A-n)\cap[0,1[$, $x \in (A-m)\cap[0,1[$. On a donc $y_1 \in A$ et $y_2 \in A$ tels que $x = y_1 - n$, et $x = y_2 - m$. On en déduit que $y_1 - y_2 = n - m$ est un entier non nul.