Avancement du cours L3 Mesure et intégration – Automne 2021

Les numéros de section, définition, etc… font référence au notes de cours de Petru Mironescu :
http://math.univ-lyon1.fr/~mironescu/resources/cours_mesure_integration.pdf

Cours 1&2 : 06/09 et 07/09

- Introduction : Motivation et idée très grossière des briques de la construction de l'intégrale de Lebesgue – schéma global du cours

Chapitre I

- Section 1.1 : Sup, inf, limsup, liminf (définition 1.1, def 1.2, remarque 1.4, proposition 1.6 avec preuve)
- Section 1.2 : Def 1.12, proposition 1.13, exercice 1.14 (sauf non dénombrabilité de [0,1]).
- Premières notations section 1.3
- Pour aller plus loin : lire la section 1.4 (preuve complète de la proposition 1.13)

Cours 3&4 : les 13/09 et 17/09

- Section 1.3 :définitions des clans tribus, classes monotones, mesures (def 1.16, 1.18, 1.24, 1.26, 1.29, 1.31 – prop 1.22, 1.23, exemples etc…)

Chapitre II :

- Section 2.1 : structures engendrées (tribus, clans, classes monotones engendrées) et premières propriétés). Exo 2.5, 2.6, exemples.
- Section 2.2 : théorème des classes monotones avec preuve (th 2.9), principe d'application (rq 2.11)
- Section 2.3 : tribu Borélienne (def 2.13), système de générateurs (prop 2.16) avec preuve de a)b). A lire : preuve prop 2.16 c).

Chapitre III

- Section 3.0 : définition générale de mesurabilité
- Section 3.1 : fonctions mesurables à valeurs dans $R, \bar{R}$. Caractérisation par préimages d'intervalles (prop 3.8). Fonctions étagées (def 3.2).

Cours 5&6 : les 20/09 et 21/09

- Caractérisation des fonctions mesurables comme limite de fonctions étagées (th 3.5, cor 3.7). Fonctions mesurables à valeurs dans R^n (thm 3.9)
- Fonctions mesurables sur un sous ensemble (lire def 3.10 et prop 3 .11)
- Section 3.2 : lim, sommes, compositions de fonctions mesurables, continu=>borélien (énoncés 3.20—3.25)
- Section 3.3 : sup, limsup et autres opérations sur les fonctions mesurables.

Chap IV

- Section 4.1 : propriétés générales des mesures
- Section 4.2 : Mesures complétées : ensembles négligeables, tribu complétées (4.7—4.11)

Cours 7&8 : les 27/09 et 28/09

- Preuve prop 4.11, mesure complétée,
- Section 4.3 : presque partout et mesure complétée
- Section 4.4 : def 4.22 et def 4.24, prop 4.23, Th 4.25a) et corollaire 4.26
- Section 4.5 : définition de la mesure de Lebesgue et propriétés (existence admise – unicité prouvée prop 4.36)

Chap VI

- 6.1 : intégrales de fonctions étagées positives
- 6.2 : définition de l'intégrale d'une fonction mesurable positive

Cours 9&10 : les 4/10 et 5/10

- Section 6.2 : définition de l'intégrale d'une fonction mesurable réelle, notion de « admet une intégrale », « fonction intégrable ». Intégrale sur un Borélien, Prop 6.15
- Section 6.4 et 6.5 : théorème de cv monotone (preuve reportée) et conséquences : linéarité, inégalité triangulaire, inégalité de Markov, relation de Chasles, intégrales de séries, égalité p.p. (6.28—6.35)
- Section 6.6 : lien avec l'intégrale de Riemann pour les fonctions continues par morceaux sur un intervalle compact, lien avec les intégrales généralisées.
- Section 6.7 :cas des intégrales par rapport à la mesure de comptage, lien avec les séries.
- Mesure de Dirac

Cours 11&12 : les 11/10 et 12/10

- Section 6.3&6.4 : séries commutativement sommables – sommations par paquets

Chapitre 7

- Section 7.1&7.2 : Lemme de Fatou (thm 7.1&7.9), convergence dominée (thm 7.2&7.10), version p.p. de la convergence monotone (thm 7.8). Preuve des 3 thms (dont cv monotone).
- Section 7.3 : continuité d'un intégrale dépendant d'un paramètre (thm7.12&7.13). Exemple de la fonction zeta.

Cours 13, 14 & 15 : les 18/10 et 19/10

- Section 7.4 : dérivabilités des intégrales à paramètres, dérivées d'ordre supérieur. Exemple de la fonction zeta.
- Section 7.5 : Lien avec les séries de fonctions. Intégrale d'une série.

Chapitre 8 :

- Section 8.1 : Tribu produit (8.1—8.3).
- Section 8.2-8.3 : mesure produit, preuve de l'existence et l'unicité. Produits itérés (preuves admises).
- Section 8.4 : Théorèmes de Fubini-Tonelli dans le cas des fonctions positives ou des fonctions intégrables (8.22—8.26). Applications aux cas de R^n et de l'inversion série intégrale. Preuve du théorème de Tonelli (cas des fonctions positives).

Cours 16 : le 2/11

- Fin du chapitre 8 : tribu produit complétée, idée sur le théorème de Fubini pour les mesures complétées (voir poly section 8.6 pour plus de détails).

Chapitre 9 :

- Matrice Jacobienne. Définition de C1-difféomorphisme, propriétés de l'application inverse (def 9.6 et implication du théorème d'inversion globale) et de sa Jacobienne.
- Théorème du changement de variable (Thm 9.4-Remarque 9.5). Equivalence avec le changement de variable pour l'application inverse.

Cours 16 : le 2/11

- Fin du chapitre 8 : tribu produit complétée, idée sur le théorème de Fubini pour les mesures complétées (voir poly section 8.6 pour plus de détails).

Chapitre 9 :

- Matrice Jacobienne. Définition de C1-difféomorphisme, propriétés de l'application inverse (def 9.6 et implication du théorème d'inversion globale) et de sa Jacobienne.
- Théorème du changement de variable (Thm 9.4-Remarque 9.5). Equivalence avec le changement de variable pour l'application inverse. Preuve admise.

Cours 17-18-19-20 : le 8-9-15-16 novembre

- Méthode de restriction en dehors d'un ensemble négligeable . Changement de variable en coordonnées polaires – changement de variable en coordonnées sphériques (dimension 3). Application des coordonnées polaires au calcul de l'intégrale Gaussienne et au calcul du volume de la boule en d=2.

Chapitre 10.

- Définition de la norme L^p et des espaces L^p (section 10.1). Espace l^p(N). Relations d'inclusion dans le cas l^p(N) et dans la cas de L^p pour des mesures finies (Remarque 10.15 – preuves en TDs). Inégalité de Hölder (10.2). Inégalité de Minkowski et L^p est un espace vectoriel normé, et son corollaire 10.28 (section 10.3). En complément et sans preuve : idée sur le théorème de Riesz et le théorème de Radon-Nikodym.

Chapitre 11.

- Introduction : motivation et idée générale sur la convolution et la régularisation des fonctions.
- Définition du produit de convolution. Existence dans le cas de fonctions L^1. Inégalités de Young (théorème 11.2 : preuve du b) dans le cas r=p et q=1 seulement).

Cours 20 : le 23 novembre

- Noyau régularisant et régularisation des fonctions L^p par convolution (Def 11.5 & prop 11.7). Convergence dans L^p de la fonction régularisée et densité des fonctions C^\infty à support compact dans L^p (Thm 11.9 et 11.11), avec une partie de la preuve (régularisation des indicatrices de compacts) et indications pour le reste.

Cours 21-22 : le 29 et 30 novembre

Chapitre 12.

- Introduction : principes et idées/motivations sur les séries de Fourier. Préliminaire : projection dans L^2 sur une famille orthonormée finie. Définition des coefficients de

Fourier pour une fonction L^1 sur [0,2\pi]. Convergence des séries de Fourier dans L2, identité de Parseval (Thm 12.4 avec preuve). Lemme de Riemann-Lebesgue.

- Convergence ponctuelle des séries de Fourier de fonctions périodiques régulières : Théorème de Dirichlet (avec preuve) et théorème de Fejer (principaux éléments de la preuve faits en TD).
- Ecriture comme somme de sinus et cosinus. Ecriture dans le cas d'un intervalle [0,T].

Cours 23-24 : le 6 et 10 décembre

Chapitre 13.

- Introduction : idée/motivation de la transformée de Fourier. Lien avec les séries de Fourier (sans énoncé formelle).
- Définition de la transformée de Fourier (TF) d'un fonction L^1. Propriété de de la TF : existence, continuité, dérivabilité, convolution, lemme de Riemann-Lebesgue (Prop 13.1 à 13.4). Théorème d'inversion (Thm 13.7) et condition suffisante d'intégrabilité de la TF (prop 13.5). Exemple de la Gaussienne et Cauchy. Extension à la transformée de Fourier de fonction L^2 et théorème d'inversion dans ce cas (Thm 13.19).