Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3e année
Mesure et intégration — Année 2020–2021

Feuille de TD # 2

Tribus, fonctions mesurables, mesures

Exercice # 1.

a) $\mathscr{P}(X)$ est une tribu.

b) $\mathscr{T} := \{\emptyset, X\}$ est une tribu.

Exercice # 2.

a) L'ensemble $\mathscr{C}_1$ des unions finies d'intervalles de $\mathbb{R}$ est un clan. De même si on remplace $\mathbb{R}$ par un intervalle I et nous considérons les intervalles contenus dans I.

b) Un *pavé de* $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de la forme $P = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, avec chaque I_j intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathscr{C}_n$ des unions finies de pavés de $\mathbb{R}^n$ est un clan.

c) Tout élément de $\mathscr{C}_n$ est une union finie d. d. d. de pavés de $\mathbb{R}^n$.

Exercice # 3. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) Si X est dénombrable, alors toute tribu sur X est a. p. d.

b) Une partie $\mathscr{T}$ de $\mathscr{P}(X)$ est une tribu si elle vérifie :

(i) $\emptyset \in \mathscr{T}$.

(ii) $A \in \mathscr{T} \implies A^c \in \mathscr{T}$.

(iii) $[A_n \in \mathscr{T}, \forall n] \implies \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{T}$.

Exercice # 4. Le but de cet exercice est de montrer qu'une réunion *arbitraire* d'ensembles mesurables n'est pas forcément un ensemble mesurable. Soit

$$\mathscr{T} := \{A \subset \mathbb{R}\,;\ A \text{ a. p. d. ou } A^c \text{ a. p. d.}\}.$$

a) Montrer que $\mathscr{T}$ est une tribu.

b) Montrer que $\mathscr{T} \neq \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

c) Conclure.

Exercice # 5. Si $X := \{1, 2, 3\}$ et $\mathscr{A} := \{\{1\}\}$, alors :

a) le clan (et la tribu) engendré par $\mathscr{A}$ est $\{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$;

b) la classe monotone engendrée par $\mathscr{A}$ est $\mathscr{A}$.

Y a-t-il une contradiction avec le théorème de la classe monotone ?

Exercice # 6. Soient $X := \mathbb{N}$ et $\mathscr{A} := \{\{n\}\,;\ n \in \mathbb{N}\}$.

a) Montrer que $\mathscr{T}(\mathscr{A}) = \mathscr{P}(\mathbb{N})$.

b) Montrer que $\mathscr{C}(\mathscr{A}) = \{A \subset \mathbb{N}\,;\ A \text{ fini ou } A^c \text{ fini}\}$.

c) En déduire que en général, $\mathscr{T}(\mathscr{A}) \neq \mathscr{C}(\mathscr{A})$.

d) En déduire que si $\mathscr{C}$ est un clan et $(A_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{C}$, alors en général $\cup_{n\geq 0} A_n \notin \mathscr{C}$ et $\cap_{n\geq 0} A_n \notin \mathscr{C}$.

e) Montrer que $\mathscr{M}(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$.

Exercice # 7. Déterminer les tribus engendrées dans X par la famille $\mathscr{A}$, où :

a) $X := \mathbb{R}$ et $\mathscr{A} := \{\mathbb{Z}\}$.

b) $X := \mathbb{R}$ et $\mathscr{A} := \{\{n\}\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$.

c) $X := \mathbb{N}$ et $\mathscr{A} = \{\{0\}, \{2\}, \{4\}, \ldots\}$.

Exercice # 8.

a) Soit $\mathscr{C}$ un clan sur X. Soit $Y \subset X$. Alors $\mathscr{C}_Y := \{A \cap Y\,;\, A \in \mathscr{C}\}$ est un clan sur Y.
De même pour une tribu $\mathscr{T}$.
$\mathscr{C}_Y$ (respectivement $\mathscr{T}_Y$) est le *clan induit* par $\mathscr{C}$ sur Y (respectivement la *tribu induite* par $\mathscr{T}$ sur Y).

b) Si $Y \in \mathscr{C}$, alors $\mathscr{C}_Y = \{A\,;\, A \in \mathscr{C},\, A \subset Y\}$.

Exercice # 9. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $Y \subset X$, muni de la métrique induite par X. Montrer que $\mathscr{B}_Y = \{B \cap Y\,;\, B \in \mathscr{B}_X\}$.

De manière équivalente, $\mathscr{B}_Y$ coïncide avec la tribu induite par $\mathscr{B}_X$ sur Y (voir l'exercice précédent).

Exercice # 10. Montrer que si $\mathscr{C}$ est un clan et $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{C}$, alors $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathscr{C}$. De même si on remplace clan par tribu.

Exercice # 11.

a) Toute tribu est un clan.

b) Toute tribu est une classe monotone.

c) Si X est fini, alors tout clan est une tribu.

Exercice # 12. Montrer que $A_n \nearrow A$ si et seulement si : la suite de fonctions $(\chi_{A_n})_n$ est croissante et converge simplement vers χ_A.

De même, $A_n \searrow A$ si et seulement si : la suite de fonctions $(\chi_{A_n})_n$ est décroissante et converge simplement vers χ_A.

Exercice # 13. Si $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles $\mathscr{A}_i \subset \mathscr{P}(X)$ telle que chaque $\mathscr{A}_i$ soit un clan (ou tribu, ou classe monotone), alors $\cap_{i\in I}\mathscr{A}_i$ est un clan (ou tribu, ou classe monotone).

Exercice # 14.

a) Si $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$, alors $\mathscr{C}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{C}(\mathscr{B})$, $\mathscr{M}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{M}(\mathscr{B})$ et $\mathscr{T}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{T}(\mathscr{B})$.

b) On a $\mathscr{C}(\mathscr{C}(\mathscr{A})) = \mathscr{C}(\mathscr{A})$. Propriété analogue pour la classe monotone et la tribu engendrées.

Exercice # 15. Soit $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$. Si $A \in \mathscr{T}(\mathscr{A})$, montrer qu'il existe une partie a. p. d. $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$ telle que $A \in \mathscr{T}(\mathscr{B})$.

Indication : considérer $\mathscr{C} := \{A \in \mathscr{T}(\mathscr{A})\,;\, \exists \mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ a. p. d. tel que $A \in \mathscr{T}(\mathscr{B})\}$.

Exercice # 16.

a) Montrer que l'union de deux tribus n'est pas forcément une tribu.

b) Montrer que l'union d'une suite finie et croissante de tribus est une tribu.

c) Ce dernier résultat ne passe pas à une union infinie. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathscr{T}_n$ la tribu sur $\mathbb{N}$ engendrée par $\mathscr{P}(\{0, \ldots, n\})$. Montrer que $(\mathscr{T}_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de tribus sur $\mathbb{N}$, mais que $\cup_{n\geq 0}\mathscr{T}_n$ n'est pas une tribu.

Exercice # 17. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) Un ouvert ou un fermé est un borélien.

b) Un borélien est un ouvert ou un fermé.

c) Un intervalle est dans $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.

Exercice # 18. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) L'ensemble $[2, 3[\cap \mathbb{Q}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.

b) L'ensemble $A := \{x \in \mathbb{R}\,;\, \cos x = \sin(\sin x)\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.

c) Si $B \subset \mathbb{R}$ est borélien et si $A \subset B$, alors A est borélien.

Exercice # 19. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $f : X \to \mathbb{R}$.

a) Montrer que f est continue en $x \in X \iff \forall \varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que

$$[y, z \in V] \implies |f(y) - f(z)| < \varepsilon.$$

b) En déduire que $\{x \in X\ ;\ f \text{ continue en } x\}$ est un borélien.

Exercice # 20. Soit (X, d) un espace métrique. Soient $f_n : X \to \mathbb{R}$ des fonctions boréliennes, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\{x \in X\ ;\ (f_n(x))_n \text{ converge}\}$ est un borélien.

Exercice # 21. Soit $\Phi : X \to Y$ un homéomorphisme. Si $A \subset X$, alors $A \in \mathscr{B}_X$ si et seulement si $\Phi(A) \in \mathscr{B}_Y$.

Exercice # 22.

a) Soient $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ et $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}$. Montrer que $A \times B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$.

b) Plus généralement, si (X, d) et (Y, δ) sont des espaces métriques et si nous munissons $X \times Y$ d'une métrique produit, alors $\mathscr{B}_X \times \mathscr{B}_Y \subset \mathscr{B}_{X \times Y}$.

Exercice # 23. Dans cet exercice, nous considérons un espace mesurable $(X, \mathscr{T})$. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs est étagée.

b) Si $f : X \to \mathbb{R}^n$ est mesurable, et si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est borélienne étagée, alors $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ est étagée.

c) Si $f : X \to \mathbb{R}$ est telle que $f^{-1}(F) \in \mathscr{T}$ pour tout $F \subset \mathbb{R}$ fermé, alors f est mesurable.

d) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne et ne s'annule pas, alors $1/f$ est borélienne.

e) Si $A \subset X$, alors $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathscr{T}$.

f) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x+1, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$, est borélienne.

g) La fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable $\iff |f|$ est mesurable.

Exercice # 24. Décrire les fonctions mesurables de $(X, \mathscr{T})$ dans $\mathbb{R}$ dans les cas suivants.
a) $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$.
b) $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$.

Exercice # 25. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

a) Montrer que f est borélienne.

b) Montrer que l'ensemble des points où f n'est pas continue est au plus dénombrable.

c) Plus généralement, si $f : I \to \mathbb{R}$ (avec $I \subset \mathbb{R}$ intervalle) est continue en dehors d'un ensemble au plus dénombrable, alors f est borélienne.

Exercice # 26.

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que f' est borélienne.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) f est dérivable en x et $f'(x) = \ell$.

(ii) Nous avons la double égalité :

$$\begin{aligned} \ell &= \lim_{m \to \infty} \inf \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\ ;\ h \in \mathbb{Q}^*,\ |h| < \frac{1}{m} \right\} \\ &= \lim_{m \to \infty} \sup \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\ ;\ h \in \mathbb{Q}^*,\ |h| < \frac{1}{m} \right\} . \end{aligned}$$

c) En déduire que, si f est continue, alors la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) := \begin{cases} f'(x), & \text{si } f \text{ est dérivable en } x \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

est borélienne.

d) Vrai ou faux ? Si $g = 0$, alors f est constante.

Dans les exercices suivants, $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(X)$ est une tribu. La mesurabilité des fonctions considérées s'entend par rapport à $\mathscr{T}$.

Exercice # 27. Soient $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable et $g : X \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } f(x) \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

Montrer que g est mesurable.

Exercice # 28. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction étagée. Montrer que $f^{-1}(B) \in \mathscr{T}, \forall\, B \subset \mathbb{R}$.

Exercice # 29. Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ fonctions étagées et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $f + g$ et λf sont étagées.

Exercice # 30. Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. On définit, pour tout $0 < M < \infty$, la fonction f_M par

$$f_M(x) := \begin{cases} f(x), & \text{si } |f(x)| < M \\ M, & \text{si } f(x) \geq M \\ -M, & \text{si } f(x) \leq -M \end{cases}.$$

Montrer que f est mesurable si et seulement si f_M est mesurable pour tout $M > 0$.

Exercice # 31. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$.

a) Rappeler pourquoi $\liminf_n f_n$ et $\limsup_n f_n$ sont mesurables.

b) En déduire que $B := \{x \in X\,;\, (f_n(x))_n \text{ est bornée}\}$ est mesurable.

c) Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit $g : X \to [0, \infty]$ par $g(x) := \inf\{n \in \mathbb{N}\,;\, f_n(x) \geq a\}$, avec la convention $\inf \emptyset = \infty$. Montrer que g est mesurable.

Exercice # 32. Soit (X, d) un espace métrique.

a) Soient $A \in \mathscr{B}_X$ et $f : A \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est borélienne.
En particulier, toute fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ est borélienne.

b) Plus généralement, si f est continue en dehors d'une partie finie de X, alors f est borélienne.

c) Encore plus généralement. Soient $A_1, A_2, \ldots,$ boréliens d. d. d. tels que $X = \sqcup_k A_k$. Pour chaque A_k, soit $f_k : A_k \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := f_k(x)$ si $x \in A_k$. Alors f est borélienne.

d) De même si, dans le point précédent, on remplace « f_k continue » par « f_k borélienne » (voir aussi le point f)).

e) De même pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

f) Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable. Soient $A_1, A_2, \ldots,$ mesurables d. d. d. tels que $X = \sqcup_k A_k$. Pour chaque A_k, soit $f_k : A_k \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := f_k(x)$ si $x \in A_k$. Alors f est mesurable.

g) Montrer que les items a)–e) sont des cas particuliers de l'item f).

Exercice # 33. Soit $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$ tel que $\emptyset \in \mathscr{C}$. Si $\mu : \mathscr{C} \to [0, \infty]$ est σ-additive, alors ou bien $\mu(\emptyset) = 0$ (et donc μ vérifie les axiomes d'une mesure), ou bien $\mu(\emptyset) = \infty$ (et dans ce cas $\mu(A) = \infty, \forall A \in \mathscr{C}$).

Exercice # 34. Soit X un ensemble. Montrer que l'application $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$,

$$\mu(A) := \begin{cases} \text{card } A, & \text{si } A \text{ est fini} \\ \infty, & \text{sinon} \end{cases}$$

est une mesure sur $\mathscr{P}(X)$. C'est la *mesure de comptage*.

Exercice # 35. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) Si $A \in \mathscr{T}$, alors $\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c)$.

b) Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathscr{T}$ et $\mu(A_2) < \infty$, alors

$$\mu\left(\cap_{n\geq 0} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n).$$

c) Si $A, B \in \mathscr{T}$ et $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, alors A et B sont disjoints.

d) Il existe un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$ tel que $\{\mu(A)\, ;\, A \in \mathscr{T}\} = \{0, 1, 2\}$.

e) Il existe un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$ tel que $\{\mu(A)\, ;\, A \in \mathscr{T}\} = \{0, 1, 3\}$.

f) La mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ est finie, respectivement σ-finie.

g) Soient $\mathscr{A}$ une famille qui engendre $\mathscr{T}$ et μ_1, μ_2 deux mesures sur $\mathscr{T}$. On suppose que pour tout A dans $\mathscr{A}$ on a $\mu_1(A) = \mu_2(A)$. Alors pour tout T dans $\mathscr{T}$ on a $\mu_1(T) = \mu_2(T)$.
Pour cette dernière question : y a-t-il des hypothèses raisonnables à ajouter ou enlever ?

Exercice # 36. Soit μ la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$. Trouver une suite décroissante d'ensembles $(A_n)_{n\geq 0}$ telle que $\mu(A_n) \not\to \mu\left(\cap_{n\geq 0} A_n\right)$.

Exercice # 37. Soit μ une mesure *finie* sur $(X, \mathscr{T})$. Soit $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ l'ensemble défini par

$$\mathscr{S} := \{A \in \mathscr{T}\, ;\, \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = \mu(X)\}.$$

Montrer que $\mathscr{S}$ est une tribu.

Exercice # 38. Soit μ une mesure σ-finie sur $(X, \mathscr{T})$. Montrer qu'il existe une suite d. d. d. $(X_n)_n \subset \mathscr{T}$ telle que $\mu(X_n) < \infty, \forall n$ et $X = \sqcup_n X_n$.

Exercice # 39. Soit μ une mesure σ-finie sur $(X, \mathscr{T})$. Soit $(X_n)_{n\geq 1} \subset \mathscr{T}$ avec $\mu(X_n) < \infty, \forall n \geq 1$ et $X = \cup_n X_n$. Posons $\mu_n(A) := \mu(A \cap (X_1 \cup \ldots \cup X_n)), \forall A \in \mathscr{T}$. Alors :

a) μ_n est une mesure finie, $\forall n \geq 1$.

b) $\mu_n \nearrow \mu$.

Exercice # 40.

a) Montrer que si $\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) < \infty$ alors

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sum_{1\leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq n} \mu(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}).$$

b) Que devient cette formule dans le cas particulier de la mesure de comptage ?

Exercice # 41. Soit $\mathscr{T}$ une tribu contenant les singletons. Soit μ une mesure sur $(X, \mathscr{T})$. Soit $D := \{x \in X\, ;\, \mu(\{x\}) > 0\}$. Est-il vrai que D est a. p. d.

a) Si μ est finie ?

b) Si μ est σ-finie ?

c) Si μ est quelconque ?

Exercice # 42.

a) Soit μ une mesure borélienne de probabilité sur $[0, 1]$, avec la propriété suivante :

$$\mu(B) > 0 \implies \mu([0,1] \setminus B) = 0, \ \forall B \in \mathscr{B}_{[0,1]}.$$

(i) Construire une suite d'intervalles fermés $(I_j)_{j\geq 0} \subset [0,1]$ avec les propriétés suivantes : $I_0 = [0,1]$, $I_{j+1} \subset I_j$, $\forall j \geq 0$, I_j est de longueur 2^{-j}, $\forall j \geq 0$, et $\mu(I_j) = 1$, $\forall j \geq 0$.

(ii) En déduire qu'il existe un point $a \in [0, 1]$ tel que $\mu = \delta_a$.

b) Soit ν une mesure borélienne σ-finie sur $\mathbb{R}$ avec la propriété suivante :

$$\nu(B) > 0 \implies \nu(\mathbb{R} \setminus B) = 0, \ \forall B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}.$$

Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in [0, \infty[$ tels que $\nu = b\,\delta_a$.

Exercice # 43. (Mesures discrètes) Soit $\mathscr{T}$ une tribu contenant les singletons. La mesure μ sur $(X, \mathscr{T})$ est *diffuse* (ou *continue*) si, pour tout $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$. μ est *discrète* s'il existe un ensemble D a. p. d. tel que $\mu(D^c) = 0$.

a) Montrer que μ est diffuse si et seulement si toute partie a. p. d. A de X est $\mu-$négligeable.

b) Montrer que μ est discrète si et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ de points de X et une suite $(c_n)_{n\geq 1} \subset [0, \infty]$ telles que $\mu = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{a_n}$.

c) Supposons maintenant μ σ-finie. Montrer que μ s'écrit de façon unique $\mu = \mu_c + \mu_d$, où μ_c est une mesure diffuse et μ_d est une mesure discrète.

Exercice # 44. (Mesure image) Soient $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable et $f : X \to \mathbb{R}^n$ une fonction mesurable. Soit μ une mesure sur $\mathscr{T}$. Nous définissons $f_*\mu : \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ par $f_*\mu(A) := \mu(f^{-1}(A))$, $\forall A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$. Rappelons que $f_*\mu$ est une mesure sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$. C'est la *mesure image* de μ par f.

a) Déterminer $f_*\delta_a$, avec $a \in X$.

b) Soit μ une probabilité sur X (donc $\mu(X) = 1$). Nous prenons $n = 1$. Si $B \in \mathscr{T}$, déterminer $(\chi_B)_*\mu$.

Dans les quatre exercices suivants, λ est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$. (Avec les notations du cours, $\lambda = \nu_1$.)

Exercice # 45. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(U) = 0$ si et seulement si $U = \emptyset$.

Exercice # 46. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) Si $A \subset \mathbb{R}$ est borélien et si $\lambda(A) > 0$, alors il existe un ouvert non vide $U \subset \mathbb{R}$ tel que $U \subset A$.
Et réciproquement ?

b) Si $A \subset \mathbb{R}$ est borélien et si $\lambda(A) < \infty$, alors A est borné.

Exercice # 47. Soit $B \in \mathscr{B}_R$ tel que $\lambda(B) > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un borélien $A \subset B$ tel que $0 < \lambda(A) < \varepsilon$. Indication : recouvrir B avec des intervalles disjoints de taille $< \varepsilon$.

Exercice # 48. Le but de cet exercice est de donner une définition équivalente de λ comme la seule mesure borélienne normée et invariante par translations.

a) Montrer que, si $x \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, alors $x + A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.

b) On fixe $x \in \mathbb{R}$. Soit $\mu : \mathscr{B}_{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ définie par $\mu(A) := \lambda(x + A)$ pour $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. Montrer que μ est une mesure sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.

c) En déduire que $\lambda(x + A) = \lambda(A)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire : *la mesure de Lebesgue est invariante par translations*.

d) Inversement, soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$, invariante par translations et telle que $\mu([0,1[) = 1$. Calculer $\mu([0,1/n[)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la mesure d'un intervalle arbitraire. Montrer que $\mu = \lambda$.

e) Prouver ou réfuter. Une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$, invariante par translations, est un multiple de la mesure de Lebesgue.

Exercice # 49. Cet exercice fait suite au précédent. Nous nous proposons de montrer que, si μ est une mesure borélienne et invariante par translations sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\mu([0,1[^n) = 1$, alors $\mu = \nu_n$.

a) Montrer que $\mu([0,1/k[^n) = (1/k)^n$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$. Indication : recouvrir $[0,1[^n$ avec des cubes d. d. d. de taille $1/k$.

b) Soit K_j comme dans le lemme 9.6 du cours. Montrer que $\mu(K_j) = \nu_n(K_j)$.

c) En déduire que $\mu(K) = \nu_n(K)$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$.

d) Conclure.

Exercice # 50. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) Une partie d'un ensemble négligeable est négligeable.

b) Une union a. p. d. d'ensembles négligeables est négligeable.

c) Une union d'ensembles négligeables est négligeable.

Exercice # 51. Pour des fonctions f, g définies sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{R}^n$, la relation $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ μ-p. p. est une équivalence.

Exercice # 52. Prouver ou réfuter. Une partie d'un ensemble Lebesgue mesurable de $\mathbb{R}^n$ est Lebesgue mesurable.

Exercice # 53. Soit $\lambda = \lambda_1$ la mesure de Lebesgue (complète) dans $\mathbb{R}$.

a) Soient f et g deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f = g\ \lambda - \text{p. p.} \iff f = g$. De même pour $f, g : A \to \mathbb{R}$, avec $A \subset \mathbb{R}^n$ tel que $A \subset \overline{\mathring{A}}$.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nous considérons les deux propriétés suivantes.
(P1) f est continue λ-p. p.
(P2) Il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f = g$ λ-p. p.
Montrer que (P1) n'implique pas (P2), et que (P2) n'implique pas (P1).

c) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un ouvert U dense dans $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(U) \leq \varepsilon$.

Exercice # 54.

a) Nous avons $\overline{\overline{\mu}} = \overline{\mu}$ et $\overline{\overline{\mathscr{T}}} = \overline{\mathscr{T}}$.

b) $\overline{\mathscr{T}}$ est complète par rapport à $\overline{\mu}$.

c) Une partie de X est μ-négligeable si et seulement sielle est $\overline{\mu}$-négligeable.

Exercice # 55. Soit λ_n la mesure (complète) de Lebesgue sur la tribu de Lebesgue $\mathscr{L}_n$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que

a) λ_n est σ-finie.

b) λ_n est l'unique mesure sur $\mathscr{L}_n$ telle que $\lambda_n(P) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$ pour tout pavé $P = \prod_{j=1}^{n}]a_j, b_j[$ de $\mathbb{R}^n$.