

Feuille de TD # 5
Mesures produit

Notations

1. ν_n est la mesure de Lebesgue sur la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ de \mathbb{R}^n .
2. λ_n est la mesure de Lebesgue sur la tribu de Lebesgue \mathcal{L}_n de \mathbb{R}^n .
3. λ est la mesure de Lebesgue sur la tribu de Lebesgue \mathcal{L}_1 de \mathbb{R} . (Donc $\lambda = \lambda_1$.)

Exercice # 1.

- a) Si X et Y sont a.p.d., alors $\mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X \times Y)$.
- b) De plus, si μ et ν sont les mesures de comptage sur X et Y respectivement, alors $\mu \otimes \nu$ est la mesure de comptage sur $X \times Y$.

Exercice # 2. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

- a) $\mathcal{T} \otimes \mathcal{S} = \{A \times B; A \in \mathcal{T}, B \in \mathcal{S}\}$.
- b) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$.
- c) $\mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_m = \mathcal{L}_{n+m}$.
- d) $\nu_n \otimes \nu_m = \nu_{n+m}$.
- e) $\lambda_n \otimes \lambda_m = \lambda_{n+m}$.
- f) Soient (X, \mathcal{T}, μ) et (Y, \mathcal{S}, ν) des espaces mesurés, avec μ et ν σ -finies. Soit $E \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$. Si $\nu(E_x) = 0$ pour (presque) tout $x \in X$, alors $\mu \otimes \nu(E) = 0$.
- g) Si μ et ν sont des mesures σ -finies, alors $\mu \otimes \nu$ est σ -finie.

Exercice # 3. Soit $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

- a) Dessiner le domaine D dans le plan et déterminer D_x et $D^y, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- b) Montrer que D est borélien.
- c) Calculer l'aire de D et $\int_D (x^2 + y^2) dx dy$.

Exercice # 4. Calculer l'aire d'un disque.

Exercice # 5.

- a) Calculer $\int_{[0,1]^2} x e^{xy} dx dy$.
- b) Calculer $\int_{\Delta} \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$, où $\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x, y \leq 1, 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Exercice # 6. Dans \mathbb{R}^3 , nous considérons :

- (i) La demi-boule fermée $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
- (ii) Le cône plein $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq z^2\}$.
- (iii) Le cylindre plein $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

En examinant les aires des coupes des ces trois solides à la hauteur z , retrouver l'identité d'Archimède :

$$\text{vol}(C) = \text{vol}(D) + \text{vol}(K),$$

« vol » désignant le volume d'un solide.

Vérifier cette identité à l'aide de formules connues.

Exercice # 7. Dans \mathbb{R}^3 , calculer le volume d'un cylindre (plein), pas forcément circulaire ou droit, en fonction de l'aire de sa base et de sa hauteur. Généralisation à \mathbb{R}^n ?

Exercice # 8.

- Montrer que, si \mathcal{H} est une homothétie de rapport k dans \mathbb{R}^m , alors $\mu_m(\mathcal{H}(A)) = k^m \mu_m(A)$, pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}^m$.
- Comme application, calculer le volume d'une pyramide dans \mathbb{R}^3 en fonction de l'aire de sa base et de sa hauteur.
- Généralisation à d'autres formes et dimensions ?
- Dans \mathbb{R}^3 , deux pyramides qui ont la même base et la même hauteur ont le même volume.

Exercice # 9. Dans \mathbb{R}^3 , on considère deux cylindres (pleins) circulaires droits infinis de rayon 1. Si les axes des cylindres sont concurrents et orthogonaux, calculer le volume de leur intersection.

Exercice # 10. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$, soit $f(x, y) := y^x$. Soient a et b tels que $-1 < a < b$.

- Montrer que f est λ_2 -intégrable sur $[a, b] \times [0, 1]$.
- Trouver la valeur de l'intégrale $I := \int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln y} dy$.

Exercice # 11. Pour $y > 0$, soit $f_y(x, t) := \frac{1}{(1 + x^2 t^2)(1 + y^2 t^2)}$, avec $x, t \in \mathbb{R}$.

- Montrer que f_y est λ_2 -intégrable sur $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$.
- Soit $g(y, t) := \int_0^1 f_y(x, t) dx$. Montrer que g est λ_2 -intégrable sur $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$.
- Trouver la valeur de l'intégrale $I := \int_0^\infty \left(\frac{\arctan t}{t} \right)^2 dt$.

Exercice # 12.

- Montrer que l'intégrale généralisée $I := \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx$ existe et que $I = 2 \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx$.
- Calculer de deux façons différentes l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} \frac{dx dy}{(1 + y)(1 + x^2 y)}.$$

En déduire que $I = \pi^2/4$.

- Déduire des questions précédentes et d'un développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1 - x^2}$ que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice # 13. En calculant de deux façons différentes l'intégrale

$$I := \int_0^\infty \left(\int_0^1 e^{-x} \sin(2xy) dy \right) dx,$$

déterminer la valeur de $\int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin^2 x}{x} dx$.

Exercice # 14. (Variables aléatoires indépendantes à densité) Soit (X, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé. Soient $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires indépendantes (voir l'exercice # 31 de la feuille # 3). Supposons que la loi $f_*P = P_f$ de f (respectivement la loi $g_*P = P_g$ de g) a la densité F (respectivement G) par rapport à ν_1 (voir l'exercice # 32 de la feuille # 3).

Soit

$$F \otimes G : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty], F \otimes G(x, y) := F(x) G(y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Nous considérons le couple $(f, g) : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ (qui est un *vecteur aléatoire*, en langage probabiliste). Montrer que la loi $(f, g)_*P = P_{(f, g)}$ de (f, g) a la densité $F \otimes G$ par rapport à ν_2 .

Exercice # 15. (Transformée de Fourier d'une mesure) Soit μ une mesure borélienne finie dans \mathbb{R} . Pour x réel, soit

$$\phi(x) := \int_{\mathbb{R}} \exp(-ixt) d\mu(t);$$

ϕ est la *transformée de Fourier de la mesure* μ . (Les probabilistes travaillent avec

$$\psi(x) := \phi(-x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(ixt) d\mu(t),$$

la *fonction caractéristique de* μ .)

- Montrer que la fonction ϕ est continue et bornée sur \mathbb{R} .
- Soient $n \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\frac{1}{2n} \int_{-n}^n \exp(iax) \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} K_n(t - a) d\mu(t),$$

où K_n est une fonction que l'on explicitera.

- Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \int_{-n}^n \exp(iax) \phi(x) dx$.
- En déduire que, si $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \phi(x) = 0$, alors μ est une mesure diffuse.
- Même conclusion si ϕ est Lebesgue intégrable sur \mathbb{R} .

Exercice # 16. Soit μ la mesure de comptage sur $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$.

- Soit $\Delta := \{(x, x) ; x \in [0, 1]\}$. Δ est-il un borélien de \mathbb{R}^2 ? De $[0, 1]^2$?
- Justifier l'existence des intégrales itérées suivantes, et les calculer.

$$I_1 := \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_{\Delta}(x, y) d\lambda(x) \right) d\mu(y) \text{ et } I_2 := \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_{\Delta}(x, y) d\mu(y) \right) d\lambda(x).$$

- Quelle hypothèse d'un théorème important n'est pas satisfaite?

Exercice # 17.

- a) Énoncer les hypothèses et les conclusions des théorèmes de Tonelli et Fubini pour la mesure de comptage sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- b) Soit

$$f(n, m) := \begin{cases} 1, & \text{si } n = m - 1 \\ -1, & \text{si } n = m + 1 \\ 0, & \text{si } n \neq m \pm 1 \end{cases}$$

Calculer $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} f(n, m)$ et $\sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n, m)$, et vérifier si les conditions de point précédent sont satisfaites.

Exercice # 18. Pour $(x, y) \in [-1, 1]^2$, soit

$$f(x, y) := \begin{cases} (xy)/(x^2 + y^2)^2, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

- a) Montrer que les intégrales itérées de f existent et sont égales.
- b) La fonction f est-elle λ_2 -intégrable sur $[-1, 1]^2$?

Exercice # 19. Soient μ_1 et μ_2 deux mesures boréliennes, σ -finies et non nulles sur \mathbb{R} . Supposons

$$\mu_1 \otimes \mu_2(\mathbb{R}^2 \setminus \Delta) = 0, \text{ où } \Delta := \{(x, x); x \in \mathbb{R}\}.$$

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b_1, b_2 \in]0, \infty[$ tels que $\mu_1 = b_1 \delta_a$ et $\mu_2 = b_2 \delta_a$. (Et réciproquement.)

- a) Montrer que si $A_1, A_2 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ sont tels que $\mu_1(A_1) > 0$ et $\mu_2(A_2) > 0$, alors $\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) > 0$.
- b) Avec A_1, A_2 comme ci-dessus, en déduire que $(A_1 \times A_2) \cap \Delta \neq \emptyset$, puis que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.
- c) Soit $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ tel que $\mu_1(A) > 0$. En utilisant les questions précédentes, montrer que $\mu_2(\mathbb{R} \setminus A) = 0$, puis que $\mu_2(A) > 0$, et enfin que $\mu_1(\mathbb{R} \setminus A) = 0$.
- d) Conclure en utilisant l'exercice # 42 de la feuille #2.

Exercice # 20. Soit μ la mesure de comptage sur \mathbb{N} , ν une mesure σ -finie sur X et soient $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ des fonction mesurables, $\forall n \in \mathbb{N}$. Soit $f(n, x) := f_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$.

- a) Quelles conditions supplémentaires doit-on ajouter pour pouvoir appliquer le théorème de Tonelli à $\mu \otimes \nu$ et à f , et quelle est l'identité obtenue?
- b) Quelles conditions supplémentaires doit-on ajouter pour appliquer le théorème de Fubini à $\mu \otimes \nu$ et à f , et quelle est l'identité obtenue?
- c) Les identités obtenues dans les deux questions précédentes restent-elles valides si ν n'est pas σ -finie?

Exercice # 21. Soit μ une probabilité sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, soit

$$F_{\mu}(t) := \mu(]t, \infty[), G_{\mu}(t) := \mu(]-\infty, t]) \text{ et } H_{\mu}(t) := \mu(\{t\}).$$

- a) Montrer que les fonctions F_{μ}, G_{μ} et H_{μ} sont boréliennes.
- b) Soit ν une autre probabilité sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} F_{\mu} d\nu = \int_{\mathbb{R}} (G_{\nu} - H_{\nu}) d\mu$.
- c) Soit $D_{\mu} := \{t \in \mathbb{R}; H_{\mu}(t) \neq 0\}$ et $D_{\nu} := \{t \in \mathbb{R}; H_{\nu}(t) \neq 0\}$.
- (i) Expliquer pourquoi les ensembles D_{μ} et D_{ν} sont a. p. d.

(ii) Montrer l'égalité suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} F_{\mu} d\nu + \int_{\mathbb{R}} F_{\nu} d\mu + \sum_{t \in D_{\mu} \cap D_{\nu}} H_{\mu}(t) H_{\nu}(t) = 1.$$

Exercice # 22. Soit μ une probabilité sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$, soit

$$H_{\mu}(x, y) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{y^2 + (x - t)^2} d\mu(t).$$

Par analogie avec l'exercice #21 de la feuille # 4, H_{μ} est l'*extension harmonique* de μ .
Le but de cet exercice est de montrer que si $H_{\mu} = H_{\nu}$, alors $\mu = \nu$.

- a) Montrer que H_{μ} est continue.
- b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{y \searrow 0} y H_{\mu}(x, y)$.
- c) Soient $a < b$ deux réels. Déterminer $\lim_{y \searrow 0} \int_a^b H_{\mu}(x, y) dx$.
- d) Soit ν une autre probabilité sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. On suppose que $H_{\mu} = H_{\nu}$. Montrer que $\mu = \nu$.