Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3^e année
Mesure et intégration — Année 2020–2021

Feuille de TD # 7

Espaces L^p. Convolution

Cadre

Sauf mention contraire, nous travaillons dans un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$. Les espaces $\mathscr{L}^p$ et L^p, $1 \leq p \leq \infty$, sont relatifs à cet espace mesuré.

Exercice # 1. (Inégalité de Young) Soient $1 < p, q < \infty$ exposants conjugués. Alors

$$a\, b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},\ \forall\, a, b \in [0, \infty[.$$

Indication : étudier, pour b fixé, la fonction $a \mapsto a^p/p + b^q/q - ab$.

Exercice # 2. Soient $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurables. Montrer les propriétés suivantes.

a) $\|tf\|_{L^p} = |t|\, \|f\|_{L^p}$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ (avec la convention $0 \cdot \infty = 0$).

b) Si $f = g$ p. p., alors $\|f - g\|_{L^p} = 0$ et $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^p}$.

c) $\|f\|_{L^p} = 0$ si et seulement si $f = 0$ p. p.

d) La définition de $\|f\|_{L^\infty}$ est correcte, au sens suivant. Soit $A := \{M \in [0, \infty]\, ;\, |f(x)| \leq M \text{ p. p.}\}$. Alors A est non vide et A a un plus petit élément, m. Cet m est le plus petit nombre C de $[0, \infty]$ avec la propriété $|f(x)| \leq C$ p. p.

e) $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$ pour $p = 1$ et $p = \infty$. (Ici, $f, g : X \to \mathbb{R}$.)

Exercice # 3. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, muni de la mesure de Lebesgue sur $\mathscr{B}_U$. Si $f \in C(U)$, montrer que $\|f\|_{L^\infty} = \sup\limits_U |f|$.

Exercice # 4. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Nous considérons des fonctions $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (pas nécessairement mesurables). Montrer que la relation d'équivalence $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ p. p. a les propriétés suivantes.

a) Si $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$, alors $f + t\, g \sim f_1 + t\, g_1$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ (à condition que les fonctions soient finies en tout point).

b) Si $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$, alors $f\, g \sim f_1\, g_1$.

c) Si $f \sim g$ et si $\Phi : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, alors $\Phi \circ f \sim \Phi \circ g$.

d) Dans cette question, $X := \mathbb{R}^n$ et $\mu := \lambda_n$.
   (i) Soit $\tau_h f(x) := f(x - h)$, $\forall\, x, h \in \mathbb{R}^n$. Si $f \sim g$, alors $\tau_h f \sim \tau_h g$, $\forall\, h$.
   (ii) Soient $f, g, f_1, g_1 : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, avec $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors $h \sim h_1$, où

$$h(y) := f(x - y)\, g(y),\ h_1(y) := f_1(x - y)\, g_1(y),\ \forall\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice # 5. Nous considérons la relation d'équivalence de l'exercice précédent, mais uniquement pour des fonctions mesurables.

a) Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}_n, \lambda_n)$. Montrer que toute classe d'équivalence contient un représentant borélien.

b) Même propriété si à la place de $\mathbb{R}^n$ nous considérons une partie borélienne de $\mathbb{R}^n$.

c) Généralisation ?

Exercice # 6. Donner un sens aux expressions suivantes.

a) « $f \in L^p$, $f \geq 0$ ».

b) « $[f \in L^p,\ \|f\|_{L^p} = 0] \implies f = 0$ ».

Exercice # 7. Donner un sens aux affirmations suivantes, puis les prouver ou les réfuter.

a) Si $f \in L^p$, alors f est mesurable.

b) Si $f \in L^p$, avec $1 \leq p < \infty$, alors f est finie p. p.

c) $f \in L^1 \implies \mu(\{x \in X\,;\, |f(x)| > t\}) \leq \|f\|_{L^1}/t,\ \forall\, t > 0$.

Exercice # 8. Nous munissons les parties boréliennes U de $\mathbb{R}^n$ de la mesure de Lebesgue λ_n. Décider pour quelles valeurs de p nous avons $f \in L^p(U, \lambda_n)$ si :

a) $U :=]0, 1]$, $f(x) := \dfrac{1}{x^a}$, $a \in \mathbb{R}$.

b) $U := \mathbb{R}$, $f := \chi_{\mathbb{Q}}$.

c) $U :=]0, \infty[$, $f(x) := \dfrac{\sin x}{x}$.

d) $U := \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, |x| \geq 1\}$, $f(x) := \dfrac{\sin |x|}{|x|^a}$, $a \in \mathbb{R}$ (avec « $|\ |$ » la norme euclidienne standard).

Exercice # 9. (Espaces ℓ^p)

a) Si μ est la mesure de comptage, alors l'égalité p. p. équivaut à l'égalité. Ainsi, nous pouvons identifier naturellement $\mathscr{L}^p$ et L^p.
Si $X = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage sur $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, alors nous définissons

$$\ell^p = \ell^p(\mathbb{N}) := \mathscr{L}^p = L^p,\ \forall\, 1 \leq p \leq \infty.$$

Nous définissons de même $\ell^p(A)$, avec A a. p. d.

b) Si $(a_n)_n$ est une suite indexée sur $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\|(a_n)_n\|_{\ell^p} = \begin{cases} \left(\sum_n |a_n|^p\right)^{1/p}, & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \sup_n |a_n|, & \text{si } p = \infty \end{cases}.$$

c) Montrer que si $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, alors $\ell^1 \subset \ell^{p_1} \subset \ell^{p_2} \subset \ell^\infty$. De plus, ces inclusions sont « continues » : si $1 \leq p \leq r \leq \infty$, alors $\|(a_n)_n\|_{\ell^r} \leq \|(a_n)_n\|_{\ell^p}$.

d) Soit $(a_n)_n \in \ell^p$, avec $p < \infty$. Montrer que pour tout $r > p$ nous avons $\lim_{s \to r} \|(a_n)_n\|_{\ell^s} = \|(a_n)_n\|_{\ell^r}$.

e) Si $1 \leq r < \infty$ et $(a_n)_n$ est une suite arbitraire, alors $\lim_{s \searrow r} \|(a_n)_n\|_{\ell^s} = \|(a_n)_n\|_{\ell^r}$.

Exercice # 10. (Espaces L^p quand la mesure est finie) Nous supposons μ finie.

a) Montrer que si $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, alors $L^\infty \subset L^{p_2} \subset L^{p_1} \subset L^1$.

b) Soit $f \in L^p$, avec $p > 1$. Montrer que pour tout $1 \leq r < p$ nous avons $\lim_{s \to r} \|f\|_{L^s} = \|f\|_{L^r}$.

c) Si $f \in L^\infty$, alors :

(i) $f \in L^p, \forall\, 1 \leq p < \infty$.

(ii) L'application $[1, \infty] \ni p \mapsto \|f\|_{L^p}$ est continue. En particulier, $\displaystyle\lim_{p \to \infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$.

Exercice # 11. Nous travaillons dans $I =]0, \infty[$ muni de la mesure de Lebesgue. Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $f \in L^p(I)$. Posons $F(x) := \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt, \forall\, x \geq 0$.

a) Donner un sens à cette définition. Montrer que F est bien définie.

b) Si $p = \infty$, montrer que F est lipschitzienne.

c) Si $1 < p < \infty$, montrer que F est « hölderienne » : il existe $C < \infty$ et $\alpha \in]0, 1[$ (que l'on déterminera) tels que $|F(x) - F(y)| \leq C\,|x - y|^\alpha$, $\forall\, x, y \geq 0$.

d) Si $p = 1$, montrer que F est continue.

e) Si $p = 1$, montrer que F est « absolument continue » : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \cdots \leq a_n < b_n$ sont tels que $(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_n - a_n) < \delta$, alors $|F(b_1) - F(a_1)| + |F(b_2) - F(a_2)| + \cdots + |F(b_n) - F(a_n)| < \varepsilon$. Indication : lemme de Lebesgue.

Exercice # 12. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Si $f_n \to f$ dans L^p et $f_n \to g$ p. p., quelle est la relation entre f et g ?

Exercice # 13.

a) En examinant la preuve de l'inégalité de Hölder, montrer le résultat suivant.
Soient $f \in L^p \setminus \{0\}$ et $g \in L^q \setminus \{0\}$, avec $1 < p, q < \infty$ conjugués et $f, g \geq 0$. Alors

$$\int f\,g = \|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^q} \iff [\exists\, C \in]0, \infty[\text{ tel que } f^p = C\,g^q].$$

b) Si nous ne supposons plus $f, g \geq 0$, montrer que

$$\int f\,g = \|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^q} \iff [\exists\, C \in]0, \infty[\text{ tel que } |f|^{p-1}\,f = C\,|g|^{q-1}\,g].$$

Exercice # 14.

a) En utilisant éventuellement l'exercice précédent, montrer le résultat suivant.
Si $1 < p < \infty$ et $f, g \in L^p \setminus \{0\}$, alors

$$\|f + g\|_{L^p} = \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \iff [\exists\, C \in]0, \infty[\text{ tel que } f = C\,g].$$

b) Que devient cette condition si $p = 1$?

Exercice # 15. Soient $1 \leq p_2, \ldots, p_k \leq \infty$ tels que $\sum_{j=1}^k 1/p_j = 1$. Alors

$$\|f_1 f_2 \ldots f_k\|_{L^1} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}}\,\|f_2\|_{L^{p_2}} \ldots \|f_k\|_{L^{p_k}},\ \forall\, f_1, f_2, \ldots, f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}.$$

Exercice # 16. Nous supposons μ finie. Si $1 \leq p \leq r \leq \infty$, alors $\|f\|_{L^p} \leq (\mu(X))^{1/p - 1/r}\,\|f\|_{L^r}$, $\forall\, f$.

Exercice # 17. Soient $1 \leq p_0 < p < p_1 \leq \infty$.

a) Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0, 1[$ tel que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\theta}{p_0} + \dfrac{1-\theta}{p_1}$.

b) Montrer que $\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^{p_0}}^\theta\,\|f\|_{L^{p_1}}^{1-\theta}$, $\forall\, f$.

Exercice # 18. (Inégalité de Hardy) Nous travaillons dans $I =]0, \infty[$ muni de la mesure de Lebesgue. Soit $1 < p < \infty$. Si $f \in L^p = L^p(I)$, nous posons $F(x) := \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, $\forall\, x > 0$.

a) Si $f \in C_c^\infty(I)$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$\int_0^\infty \frac{|F(x)|^p}{x^p}\,dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty |f(x)|^p\,dx. \tag{1}$$

b) Montrer que l'inégalité (1) reste vraie pour tout $f \in L^p$.

Exercice # 19. (Inégalité de Landau)

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f est Lebesgue intégrable, montrer qu'il existe une suite $(R_n)_n$ telle que :
   (i) $2n \leq R_n \leq 2n+1, \forall\, n$.
   (ii) $f(R_n) \to 0$.
b) Si, de plus, f est dérivable, montrer qu'il existe une suite $(S_n)_n$ telle que
   (i) $R_n < S_n < R_{n+1}, \forall\, n$ (et donc $S_n \to \infty$).
   (ii) $f(S_n)\, f'(S_n) \to 0$.
   Indication : appliquer le théorème des accroissements finis à f^2.
   De même, il existe $(T_n)_n$ telle que $T_n \to -\infty$ et $f(T_n)\, f'(T_n) \to 0$.
c) (Inégalité de Landau) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que f soit (Lebesgue) intégrable et f'' soit bornée. Montrer que $f' \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}, \nu_1)$ et que

$$\int_{\mathbb{R}} (f')^2 \leq \|f''\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} |f|.$$

On pourra commencer par calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{T_n}^{S_n} (f')^2(x)\, dx$ si, de plus, $f \in C^2$.

Exercice # 20. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Montrer que $\{f \in L^p(X, \mu)\, ;\, f \text{ étagée}\}$ est dense dans $L^p(X, \mu)$. Il convient de distinguer les cas $1 \leq p < \infty$ et $p = \infty$.

Exercice # 21.

a) Soit $(X, \mathscr{T}, P)$ un espace probabilisé. Soient $f, g : X \to]0, \infty[$ deux fonctions mesurables telles que $f \cdot g \geq 1$. Montrer que $\displaystyle\int f\, dP \cdot \int g\, dP \geq 1$. Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz, c'est-à-dire l'inégalité de Hölder avec $p = q = 2$.
b) Si $a_1, \ldots, a_n > 0$, alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} \geq n^2$.

Exercice # 22. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions mesurables. Nous avons $f * g(x) = g * f(x)$, au sens du théorème du changement de variables.

Exercice # 23. Soit ρ un noyau régularisant standard. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons :

a) $\rho_\varepsilon(x) \geq 0$ si $|x| < \varepsilon$.
b) $\rho_\varepsilon(x) = 0$ si $|x| \geq \varepsilon$.
c) $\displaystyle\int \rho_\varepsilon = 1$.

Exercice # 24. Soient $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Alors :

a) $f * \varphi$ est défini en tout point.
b) $f * \varphi \in C^k$.
c) Pour toute dérivée partielle ∂^α d'ordre $\leq k$, $\partial^\alpha(f * \varphi) = (\partial^\alpha f) * \varphi$.
d) Si f est un polynôme (de n variables) de degré $\leq m$, alors $f * \varphi$ est un polynôme de degré $\leq m$.

Exercice # 25. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soient $1 \leq p_1, \ldots, p_k < \infty$. Soit $f \in L^{p_1}(\Omega) \cap \ldots \cap L^{p_k}(\Omega)$. Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_j)_j \subset C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi_j \to f$ quand $j \to \infty$ dans $L^{p_i}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, k$.

Exercice # 26. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $C^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $C_c^\infty(\Omega)$ ne sont pas denses dans $L^\infty(\Omega)$.

Exercice # 27. Nous travaillons dans $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue. Nous nous proposons de montrer le résultat suivant : si $A, B \in \mathscr{L}_n$ satisfont $\lambda_n(A) > 0$, $\lambda_n(B) > 0$, alors l'ensemble $A + B$ contient une boule ouverte non vide.

a) Montrer que l'on peut supposer A et B compacts.

b) Montrer que $f := \chi_A * \chi_B$ est continue.

c) Calculer $\displaystyle\int f$ et conclure.

Exercice # 28. (Produit de convolution de deux mesures) Soient μ, ν deux mesures boréliennes σ-finies sur $\mathbb{R}^n$. À chaque ensemble borélien de $\mathbb{R}^n$, nous associons l'ensemble

$$F = F(E) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \,;\, x + y \in E\}.$$

a) Montrer que F est borélien.

b) Montrer que la formule $\xi(E) := \mu \otimes \nu(F), \forall\, E \in \mathscr{B}_{R^n}$, définit une mesure borélienne ξ sur $\mathbb{R}^n$. Cette mesure est le *produit de convolution* des mesures μ et ν, noté $\mu * \nu$.

c) Montrer que le produit de convolution est commutatif.

d) Si les mesures boréliennes μ, ν, η sont finies, alors leur produit est associatif.

e) Montrer que δ_0 (la mesure de Dirac en 0) est l'élément neutre de la convolution.

f) Si μ et ν sont des mesures à densités f, respectivement g, par rapport à ν_n, montrer que $\mu * \nu$ a la densité $f * g$.

g) Si μ est à densité f par rapport à ν_n, alors $\mu * \nu$ a la densité $f * \nu$, où

$$f * \nu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)\, d\nu(y),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice # 29. (Convolution d'une fonction et d'une mesure) Cet exercice fait suite à l'exercice précédent. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne, et μ est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$, nous posons, sous réserve d'existence,

$$f * \nu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)\, d\nu(y),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

a) Si f est Lebesgue intégrable et μ est finie, alors $f * \mu$ est définie ν_n-p. p., et est une fonction Lebesgue intégrable. Indication : théorème de Fubini.

b) Si $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ et μ est une mesure de Radon, alors $f * \mu$ est définie en tout point, et est une fonction de classe C^k.

Exercice # 30. (Équations de Cauchy) Nous considérons les *équations fonctionnelles* (de Cauchy) suivantes :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x + y) = f(x) + f(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| = 1\},\ g(x + y) = g(x)\, g(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Un résultat très connu affirme que, si f est une solution *continue* de (3), alors

$$\text{il existe } A \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = Ax, \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ (et réciproquement).} \tag{5}$$

Un résultat un peu moins connu affirme que, si g est une solution *continue* de (4), alors

$$\text{il existe } A \in \mathbb{R} \text{ tel que } g(x) = e^{\imath Ax}, \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ (et réciproquement).} \tag{6}$$

Ces conclusions ne sont plus vraies s'il n'y a aucune hypothèse sur f et g, mais donner des contre-exemples sort du cadre de cet enseignement. (En demander en algèbre.)

Nous nous proposons de montrer que (5) et (6) restent vraies sous l'hypothèse plus faible que f (ou g) est *Lebesgue mesurable*. Nous assumons cette hypothèse dans ce qui suit, et nous travaillons avec la mesure de Lebesgue.

Pour commencer, nous admettons la propriété qui suit, qui sera démontrée plus loin.

$$\text{Si } g \in L^\infty(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ \text{alors il existe } \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \text{ telle que } \int_{\mathbb{R}} g(y)\, \psi(y)\, dy \neq 0. \tag{7}$$

a) Soit g solution Lebesgue mesurable de (4). En multipliant (4) par $\psi(y)$, avec ψ comme dans (7) (avec $n = 1$), et en intégrant dans la variable y, montrer que $g \in C^\infty(\mathbb{R})$.
Puis conclure grâce au préambule de l'exercice.

b) Soit f une solution Lebesgue mesurable de (3). Soit $g := e^{\imath f}$. En utilisant la question précédente pour g, montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ et une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tels que

$$f(x) = Ax + 2\pi\, h(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

c) (i) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ une fonction telle que

$$h(x + y) = h(x) + h(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

(aucune hypothèse de mesurabilité).
Montrer que $h(x) = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

(ii) Conclusion ?

d) Montrons (7). Soit $A := \{y \in \mathbb{R}\,;\ g(y) \neq 0\}$.

(i) Expliquer pourquoi $\lambda_1(A) > 0$.

(ii) Montrer qu'il existe $K \subset A$ un compact tel que $\nu_1(K) > 0$. Indication : la mesure de Lebesgue est une mesure de Radon.

(iii) Soit ρ un noyau régularisant. Montrer que (7) est vraie si $\psi := (\operatorname{sgn} g\, \chi_K) * \rho_\varepsilon$, avec ε suffisamment petit. Indication : convergence dominée.

e) Généraliser ce qui précède à des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}$.